

Huiswerk week 2

Opgave 5.

Zij C de binaire Hamming code van lengte $n = 2^k - 1$. Laat zien dat de gewichts enumerator $A(z) = \sum_{i=0}^n A_i z^i$ gegeven is door

$$A(z) = \frac{1}{n+1} \left((1+z)^n + n(1-z)^{(n+1)/2} (1+z)^{(n-1)/2} \right).$$

(Hint: Volgens Opgave 3 heeft de duale code $C^\perp$ de gewichts enumerator $1 + (2^k - 1)z^{2^{k-1}} = 1 + nz^{(n+1)/2}$.)

Opgave 6. Zij C een binaire code met gewichts enumerator $A(z) = \sum_{i=0}^n A_i z^i$.

- (i) Laat zien dat voor de gewichts enumerator $\overline{A} = \sum_{i=0}^{n+1} \overline{A}_i z^i$ van de uitgebreide code $\overline{C}$ geldt:

$$\overline{A}(z) = \frac{1}{2} \left((1+z)A(z) + (1-z)A(-z) \right).$$

- (ii) Zij $\overline{C}$ de uitgebreide binaire Hamming code van lengte 2^k . Bepaal de gewichts enumerator van de duale code $\overline{C}^\perp$.

(Hint: Pas deel (i) op het resultaat van Opgave 5 toe en gebruik de stelling van MacWilliams.)

Opgave 7.

Zij C een perfecte e -foutcorrigerende code over $\mathbb{F}_q$ met $0 \in C$ en zij $A(z) = \sum_{i=0}^n A_i z^i$ de gewichts enumerator van C .

- (i) Bepaal het aantal codewoorden van gewicht $2e + 1$ in C .

(Hint: Kijk naar vectoren $x \in \mathbb{F}_q^n$ met $w(x) = e + 1$.)

- (ii) Laat zien dat $A(z)$ eenduidig vast ligt, d.w.z. niet van de concrete code afhangt.

(Hint: Uit de eigenschap dat C een perfecte code is laat zich een recursie voor A_{i+e} afleiden, die alleen maar van $A_{i+e-1}, \dots, A_{i-e}$ afhangt. Ga hiervoor na hoe de vectoren $x \in \mathbb{F}_q^n$ van gewicht i met hoogstens e fouten uit codewoorden verkregen kunnen worden.)

- (iii) Bepaal de gewichts enumerator van een perfecte binaire $[23, 12]$ -code (i.e. 12-dimensionale deelruimte van $\mathbb{F}_2^{23}$) met minimum afstand $d = 7$, dus $e = 3$. De eenduidige lineaire code met deze eigenschap is de binaire Golay code $\mathcal{G}_{23}$.

- (iv) Bepaal de gewichts enumerator van de uitgebreide binaire Golay code $\mathcal{G}_{24} = \overline{\mathcal{G}_{23}}$. Laat zien dat $\mathcal{G}_{24}$ een zelfduale code is.
- (v) Bepaal de gewichts enumerator van een perfecte ternaire $[11, 6]$ -code (i.e. 6-dimensionale deelruimte van $\mathbb{F}_3^{11}$) met minimum afstand $d = 5$, dus $e = 2$. De eenduidige lineaire code met deze eigenschap is de ternaire Golay code $\mathcal{G}_{11}$.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw2_10/dw2.html