

Huiswerk week 3

Opgave 8.

- (i) Laat zien dat voor een $2 - (v, 4, 1)$ design geldt dat $v \equiv 1$ of $4 \pmod{12}$.
- (ii) Laat zien dat voor een $3 - (v, 6, 1)$ design geldt dat $v \equiv 2$ of $6 \pmod{20}$.

Opgave 9. Zij $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ een $2 - (v, k, \lambda)$ design met $b = |\mathcal{B}|$ blokken. We weten dat dan ieder punt $p \in \mathcal{P}$ in $r = \frac{bk}{v}$ blokken ligt. Definieer een *lijn* als de doorsnede van alle blokken $B \in \mathcal{B}$ die een paar p, q van punten in $\mathcal{P}$ bevatten. Bewijs de volgende beweringen:

- (i) Ieder paar punten $p, q \in \mathcal{P}$ ligt op een unieke lijn.
- (ii) Als een lijn L een blok $B \in \mathcal{B}$ in twee punten snijdt, dan is $L \subset B$.
- (iii) Voor een lijn L geldt dat $2 \leq |L| \leq \frac{b-\lambda}{r-\lambda}$.

Opgave 10.

Zij A een abelse groep van orde v (die we als optelgroep schrijven, dus met 0 als neutraal element). Een deelverzameling $D \subset A$ met $|D| = k$ heet een *verschilverzameling* met parameters (v, k, λ) als de verschillen $a - b$ voor $a, b \in D$ iedere waarde van $A \setminus \{0\}$ precies λ keer aannemen. Voor $a \in A$ noteren we met $a + D$ de translatie $a + D := \{a + d \mid d \in D\}$ van D .

- (i) Zij $D \subset A$ een verschilverzameling met $|D| = k$. Laat zien dat A met de blokken $\mathcal{B} := \{a + D \mid a \in A\}$ een $2 - (v, k, \lambda)$ design vormt en bepaal de waarde van λ (afhankelijk van v en k).
- (ii) Zij $\mathbb{F}_q$ een eindig lichaam met q elementen en neem aan dat $q \equiv 3 \pmod{4}$. Laat zien dat de verzameling $D := \{x^2 \mid 0 \neq x \in \mathbb{F}_q\}$ van kwadraten in $\mathbb{F}_q$ een verschilverzameling met parameters $(q, (q-1)/2, (q-3)/4)$ vormt. (Hint: Voor $q \equiv 3 \pmod{4}$ is -1 geen kwadraat in $\mathbb{F}_q$: De multiplicatieve groep $\mathbb{F}_q^*$ is cyclisch van orde $q-1$ en $-1 = z^{(q-1)/2}$ voor een voortbrenger z van $\mathbb{F}_q^*$. Maar voor $q \equiv 3 \pmod{4}$ is $(q-1)/2$ oneven, terwijl de kwadraten in $\mathbb{F}_q$ de even machten van z zijn.)
- (iii) Maak 2-designs met parameters
 - (a) $2 - (7, 3, 1)$,
 - (b) $2 - (11, 5, 2)$,
 - (c) $2 - (13, 4, 1)$,
 - (d) $2 - (16, 6, 2)$

door geschikte verschilverzamelingen in $\mathbb{F}_7$, $\mathbb{F}_{11}$, $\mathbb{F}_{13}$ en $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ te vinden.