

Huiswerk week 4

Opgave 11.

Ook als n geen priemmacht is, noemt men een $2 - (n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ design een *projectief vlak* van orde n . Net zo noemt men een $2 - (n^2, n, 1)$ design een *affien vlak* van orde n .

- (i) Ga na dat een projectief vlak een symmetrisch design is.
- (ii) Laat zien dat een projectief vlak van orde n een affien vlak van orde n bevat (door een blok en de daarin liggende punten weg te laten).
- (iii) Twee blokken B en B' van een affien vlak heten *parallel* als $B = B'$ of $B \cap B' = \emptyset$.
 - (a) Laat zien dat er voor een punt p en een blok B van een affien vlak een unieke blok B' is die p bevat en parallel met B is.
 - (b) Ga na dat *parallel zijn* een equivalentie relatie is.
 - (c) Laat zien dat de blokken van een affien vlak van orde n in $n + 1$ equivalentieklassen van telkens n blokken vallen.
- (iv) Laat zien dat zich een affien vlak van orde n tot een projectief vlak van orde n laat uitbreiden.
- (v) Concludeer dat een projectief vlak van orde n bestaat dan en slechts dan als een affien vlak van orde n bestaat.

Opgave 12.

Een $3 - (v, 4, 1)$ design $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ heet een *Steiner quadrupel systeem* van orde v , kort $SQS(v)$.

- (i) Laat zien dat een noodzakelijke voorwaarde voor het bestaan van een $SQS(v)$ is, dat $v \equiv 2$ of $4 \pmod{6}$.
- (ii) Bewijs dat voor een $SQS(v)$ het aantal blokken gelijk is aan $v(v-1)(v-2)/24$. Geeft dit een verdere beperking voor de mogelijke waarden van v (ten opzichte van deel (i))?
- (iii) Zij $\mathcal{P} = \mathbb{F}_2^n$ een n -dimensionale vectorruimte over het lichaam van 2 elementen. Definieer de blokken door

$$\mathcal{B} := \{\{x, y, z, w\} \subset \mathcal{P} \mid x, y, z, w \text{ verschillend met } x + y + z + w = 0\}.$$

Laat zien dat $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ een $SQS(2^n)$ is.

- (iv) Voor welke eindige lichamen $\mathbb{F}_q$ (met een priemmacht $q = p^m$) geeft de constructie uit (iii) een $SQS(q^n)$?

Opgave 13.

Een *uitbreiding* van een $t-(v, k, \lambda)$ design $\mathcal{D}$ is een $(t+1)-(v+1, k+1, \lambda)$ design $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ zo dat het afgeleide design bij weglaten van een punt $p \in \mathcal{P}$ isomorf met $\mathcal{D}$ is.

Construeer een $SQS(10)$ (d.w.z. een $3-(10, 4, 1)$ design) als uitbreiding van het $STS(9) = AG_2(3)$ met blokken

$$\begin{array}{lll} \{123\} & \{456\} & \{789\} \\ \{147\} & \{258\} & \{369\} \\ \{159\} & \{267\} & \{348\} \\ \{168\} & \{249\} & \{357\} \end{array}$$

(Hint: Voeg een punt 0 toe, dan moeten de blokken van het $SQS(10)$ die 0 bevatten na het weglaten van 0 juist de blokken van het $STS(9)$ zijn. Maar net zo moeten de blokken van het $SQS(10)$ die 1 bevatten na het weglaten van 1 de blokken van een $STS(9)$ zijn (echter niet van het oorspronkelijke). Dit geeft sterke randvoorwaarden voor de blokken in het $SQS(10)$.)

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw2_10/dw2.html