

Huiswerk week 5

Opgave 14.

Laat zien dat er tot op equivalentie na een unieke Hadamard matrix van orde 12 is.

Opgave 15.

Voor een Hadamard matrix H van orde n zij B_H de $n \times n$ matrix over $\mathbb{F}_2$ verkregen uit H door alle -1 en door 0 en te vervangen, d.w.z.

$$(B_H)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } H_{ij} = 1 \\ 0 & \text{als } H_{ij} = -1 \end{cases}.$$

Verder zij J de matrix (over $\mathbb{F}_2$) met alle elementen 1. Dan wordt de binaire *Hadamard code* C_H van H gedefinieerd als de code met als codewoorden de rijen van B_H en de rijen van $B_H + J$ (dit zijn juist de complementen van de rijen van B_H). Merk op dat de Hadamard code in het algemeen geen lineaire code is.

Voorbeeld: Voor de Hadamard matrix $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ is B_H de matrix $B_H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $B_H + J$ is de matrix $B_H + J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De codewoorden van C_H zijn dus 1111, 1010, 1100, 1001, 0000, 0101, 0011, 0110. Dit is inderdaad een lineaire code.

We gaan ervan uit dat H genormaliseerd is, in dit geval bevat C_H de nulvector.

- (i) Laat zien dat voor een Hadamard matrix H van orde n de Hadamard code C_H een code van lengte n met $2n$ codewoorden en minimum afstand $n/2$ is.
- (ii) We definiëren de *rang* $\text{rk } C$ van een code C als de dimensie van het opspansel van de codewoorden, d.w.z. $\text{rk } C = \dim L(\{c \mid c \in C\})$.
Laat zien dat voor een Hadamard code C_H van lengte n geldt dat $\text{rk } C_H \geq 2 \log(n) + 1$ en dat de code lineair is dan en slechts dan als gelijkheid geldt.
- (iii) Laat zien dat de Hadamard codes voor de Kronecker producten van de Sylvester matrix lineair zijn, d.w.z. voor de matrices

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad H_{2^m} = H_2 \otimes H_{2^{m-1}} \quad \text{voor } m \geq 2.$$

(Hint: Gebruik inductie.)

Opgave 16.

Als we van een genormaliseerde Hadamard matrix van orde 12 de eerste rij en kolom schrappen en vervolgens voor iedere kolom de rij-indices met een -1 in deze kolom als blokken definiëren, krijgen we een $2 - (11, 6, 3)$ design.

Zij N de incidentie matrix van zo'n $2 - (11, 6, 3)$ design, definieer dan

$$P = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & & \cdots & 1 \\ 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & & & & \end{array} \right) \in \mathbb{F}_2^{12 \times 12} \quad \text{en} \quad G = (I_{12} \quad P) \in \mathbb{F}_2^{12 \times 24}.$$

Dan is G de generator matrix van een binaire code G_{24} van lengte 24 en dimensie 12. Deze code heet de *binair Golay code* van lengte 24.

- (i) Laat zien dat voor het gewicht $w(G_i)$ van de rijen van G geldt dat $w(G_i) \equiv 0 \pmod{4}$.
- (ii) Bewijs dat G_{24} zelfduaal is en laat zien dat $w(c) \equiv 0 \pmod{4}$ voor alle $c \in G_{24}$.
(Hint: Gebruik inductie over het aantal coëfficiënten van c .)
- (iii) Laat zien dat geen lineaire combinatie van de rijen van G gewicht 4 heeft en concludeer dat G_{24} minimum afstand 8 heeft.
(Hint: Interpreteer N over $\mathbb{F}_2$. Laat zien dat een som van twee rijen van N gewicht 6 heeft. Ga verder na dat de enige lineaire combinatie van de rijen van N die de nulvector geeft de som van alle rijen van N is.)
- (iv) Laat zien dat weglaten van een willekeurige kolom uit G een generator matrix van een binaire code G_{23} van lengte 23 en dimensie 12 met minimum afstand 7 oplevert.
Ga na dat dit een perfecte code is. Deze code heet de *binair Golay code* van lengte 23.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/dw2_10/dw2.html