

## Huiswerk week 6

**Opgave 17.**

Zij  $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$  een permutatie van de getallen  $1, 2, \dots, n^2 + 1$ .

Toon met behulp van de stelling van Dilworth aan dat de rij  $(a_i)$  een monotone deelrij met  $n + 1$  elementen heeft (d.w.z. er zijn  $i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1}$  zo dat  $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_{n+1}}$  of  $a_{i_1} > a_{i_2} > \dots > a_{i_{n+1}}$ ).

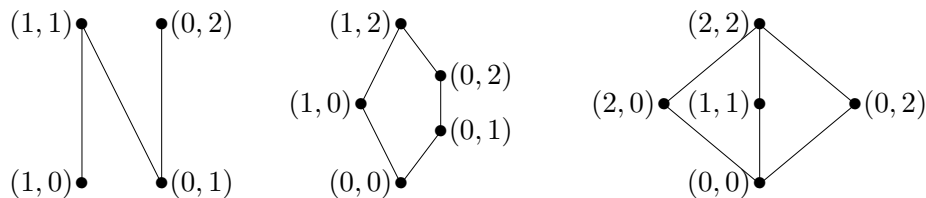
**Opgave 18.**

Een direct product  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$  van ketens (totaal geordende verzamelingen)  $X_i$  wordt een partieel geordende verzameling (poset) als we voor elementen  $(x_1, x_2, \dots, x_r), (y_1, y_2, \dots, y_r) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_r$  definiëren:

$$(x_1, x_2, \dots, x_r) \preceq (y_1, y_2, \dots, y_r) :\Leftrightarrow x_i \leq y_i \text{ voor alle } i \in \{1, \dots, r\}.$$

De *dimensie* van een poset  $(P, \leq)$  is het kleinste getal  $r$  zo dat  $P$  met behoud van de ordening in een direct product van  $r$  ketens ingebed kan worden, d.w.z. zo dat er een injectieve afbeelding  $\iota : P \rightarrow X_1 \times \dots \times X_r$  bestaat met  $p \leq q \Leftrightarrow \iota(p) \leq \iota(q)$ .

De Hasse diagrammen hieronder laten zien dat de *N-poset* (links), de *vijfhoek-poset* (midden) en de *drie-punten-lijn* (rechts) alle dimensie 2 hebben, omdat ze een inbedding in de poset  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  (met de natuurlijke ordening op  $\mathbb{N}$ ) hebben.



- (i) Laat zien dat in een willekeurige poset iedere antiketen  $A$  met  $|A| > 1$  dimensie 2 heeft.
- (ii) De *incidentie poset* van een graaf  $G = (V, E)$  heeft  $V \cup E$  als elementen (d.w.z. de knopen en kanten) en de relaties  $v \leq e$  als  $e$  een kant is die de knoop  $v$  bevat (en natuurlijk de relaties  $v \leq v$  en  $e \leq e$ ).

Laat zien dat de enige samenhangende grafen waarvoor de incidentie poset dimensie 2 heeft de paden zijn, d.w.z. bomen met alleen maar punten van graad  $\leq 2$ .

**Opgave 19.**

Zij  $G = (X \cup Y, E)$  een bipartiete graaf.

- (i)  $G$  heet regulier van graad  $d$  als iedere knoop dezelfde graad  $d$  heeft.

Laat zien dat iedere reguliere bipartiete graaf  $G$  een perfecte matching heeft.

- (ii)  $G$  heet *semiregulier* als iedere knoop in  $X$  dezelfde graad  $s$  en iedere knoop in  $Y$  dezelfde graad  $t$  heeft.

Laat zien dat iedere semireguliere bipartiete graaf  $G$  met  $|X| \leq |Y|$  een perfecte matching heeft.

- (iii) Zij  $G$  een reguliere bipartiete graaf van graad  $n - 1$  met  $2n$  punten, d.w.z.  $|X| = |Y| = n$ .

Laat zien dat het aantal perfecte matchings in  $G$  gelijk is aan het aantal permutaties zonder vaste punten (derangements) op  $n$  punten.

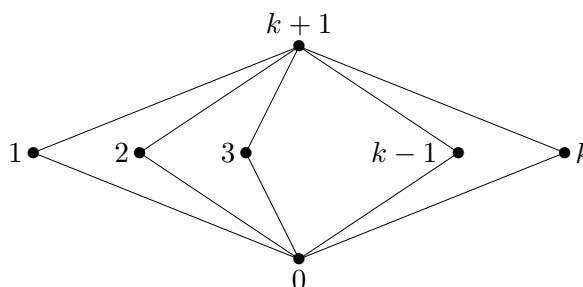
Geef het aantal perfecte matchings in deze situatie voor  $n = 3, 4, 5$  aan.

## Opgaven voor week 7 (hoeven niet ingeleverd te worden)

### Opgave 20.

Bepaal de Möbius functies  $\mu(x, y)$  voor de volgende posets:

- (i) een  $k$ -punten lijn: dit is de poset  $X = \{0, \dots, k + 1\}$  met relaties  $0 \leq i$  en  $i \leq k + 1$  voor  $i \in \{1, \dots, k\}$  (zie het Hasse diagram hieronder);



- (ii) de incidentie poset van een graaf  $G = (V, E)$  (zie Opgave 18(ii)).

### Opgave 21.

Zij  $P = (X, \leq)$  een eindige poset. Laat zien dat voor de Möbius functie op  $X$  geldt dat

$$\mu(a, b) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i(a, b)$$

waarbij  $c_i(a, b)$  het aantal ketens  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i = b$  van lengte  $i$  tussen  $a$  en  $b$  is. Met  $x < y$  noteren we hierbij dat  $x \leq y$  en  $x \neq y$ .

Webpagina: [http://www.math.ru.nl/~souvi/dw2\\_10/dw2.html](http://www.math.ru.nl/~souvi/dw2_10/dw2.html)