

## Tentamen Discrete Wiskunde 2

*Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voordat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!*

### Opgave 1. (12 punten)

Het *Pasch axioma* (ook wel *Veblen-Young axioma* geheten) zegt het volgende: Laten  $A, B, C$  drie verschillende lijnen zijn die elkaar paarsgewijs in verschillende punten snijden, d.w.z.  $A \cap B = \{c\}$ ,  $B \cap C = \{a\}$ ,  $C \cap A = \{b\}$  met  $a, b, c$  drie verschillende punten. Zij nu  $L$  een lijn die  $B$  en  $C$  in punten verschillend van  $a$  snijdt. Dan snijdt  $L$  ook de lijn  $A$ .

- (i) Geef een schets van de beschreven configuratie.
- (ii) Bewijs dat het Pasch axioma in de projectieve meetkunde  $PG(n, q)$  geldt.
- (iii) Bewijs of weerleg dat het Pasch axioma in de affiene meetkunde  $AG(n, q)$  geldt.

### Opgave 2. (12 punten)

Zij  $K_6$  de volledige graaf met 6 knopen. We nemen als punten van een beoogd design de kanten van  $K_6$ . Hiervoor definiëren we twee typen van blokken:

- (a) drie kanten die een driehoek vormen;
  - (b) drie kanten die paarsgewijs geen knopen gemeenschappelijk hebben (en dus alle 6 knopen bevatten).
- (i) Laat zien dat de kanten van  $K_6$  met deze blokken een  $2 - (v, k, \lambda)$  design vormen en geef de parameters  $v, k, \lambda$  aan.
  - (ii) Wat is het aantal blokken in dit design?
  - (iii) In hoeveel blokken ligt een kant uit  $K_6$ ?
  - (iv) Wat zijn voor dit design de parameters van het afgeleide design m.b.t. een kant van  $K_6$ ?

**Opgave 3.** (18 punten)

Zij  $X$  een eindige verzameling met  $|X| = n$  elementen. Definieer een relatie  $\preceq$  op de machtsverzameling  $\mathcal{P}(X)$  door

$$Y \preceq Z \quad \text{als} \quad |Y| < |Z| \text{ of } Y = Z.$$

- (i) Laat zien dat  $\mathcal{P}(X)$  met de relatie  $\preceq$  een poset wordt.
- (ii) Voor welke  $n$  is de poset  $(\mathcal{P}(X), \preceq)$  een tralie? (Onderbouw je antwoord!)
- (iii) Wat is het maximale aantal elementen in een antiketen van  $(\mathcal{P}(X), \preceq)$ ?
- (iv) Bepaal voor  $n = 3$  de Möbius functie van  $(\mathcal{P}(X), \preceq)$ .
- (v) Wat is de dimensie van  $(\mathcal{P}(X), \preceq)$ ? (Onderbouw je antwoord!)

**Opgave 4.** (8 punten)

Tijdens het college is bewezen dat voor het aantal  $b$  van blokken in een  $t - (v, k, \lambda)$  design geldt dat  $b = \lambda \binom{v}{t} / \binom{k}{t}$ .

- (i) Laat zien dat voor een  $2 - (v, 4, 1)$  design geldt dat  $v \equiv 1$  of  $4 \pmod{12}$ .
- (ii) Laat zien dat voor een  $3 - (v, 6, 1)$  design geldt dat  $v \equiv 2$  of  $6 \pmod{20}$ .

**Succes ermee!**