Opgaven 1

Opgave 1.
Geef voor elk van de platonische lichamen (tetraëder, hexaëder/kubus, octaëder, dodecaëder, icosaëder) aan, hoeveel verschillende zwart-wit kleuringen van de zijvlakken er zijn. Verschillend zijn twee kleuringen als ze niet door een rotatie van het lichaam in elkaar over gaan.

Opgave 2.
Laten $a = (1, 2, 3, 4)$, $b = (1, 2)$, $c = (5, 6, 7, 8, 9, 10)$ en $d = (5, 10)(6, 9)(7, 8)$ dan is $\langle a, b\rangle \cong S_4$, $\langle c, d\rangle \cong D_{12}$ en $G := \langle a, b, c, d\rangle \cong S_4 \times D_{12} \le S_{10}$. Het is duidelijk dat G op $\Omega = \{1, \dots, 10\}$ de banen $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ en $\Omega_2 = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ heeft. Vind alle ondergroepen van G, die op Ω_1 een actie isomorf met S_4 en op Ω_2 een actie isomorf met D_{12} hebben.

Opgave 3.
Bewijs de **stelling van Sylow**:
Zij G een groep van orde $|G| = p^n m$, waarbij p een priemgetal is en $\mathrm{ggd}(p, m) = 1$. Dan heeft G voor elke $0 \le r \le n$ een ondergroep H van orde $|H| = p^r$.
Volg (bijvoorbeeld) de volgende stappen:

- G werkt op de deelverzamelingen $\mathfrak{M} := \{M \subseteq G \mid |M| = p^r\}$ van p^r elementen door vermenigvuldiging van rechts: $M \to \{mg \mid m \in M\}$
- de precieze macht van p die de cardinaliteit $\binom{p^n m}{p^r}$ van $\mathfrak{M}$ deelt, is p^s met $s = n - r$
- concludeer dat er een deelverzameling $M \in \mathfrak{M}$ is, waarvan de baan een lengte heeft die hoogstens door p^s deelbaar is (maar niet door p^{s+1})
- zij G_M de stabilisator van M (als verzameling): laat zien dat $|G_M| \le |M| = p^r$
- de lengte van de baan van M is gelijk aan de index van G_M in G: concludeer dat $|G_M| \ge p^r$

Merk op: De stelling van Sylow is een partiële omkering van de stelling van Lagrange (die beweert dat de orde van een ondergroep de orde van de groep deelt), want tenminste voor de delers van $|G|$ die een macht van een priemgetal zijn, bestaan er inderdaad ondergroepen van deze orde. De ondergroepen van maximale orde p^n heten *Sylow-p-ondergroepen*.

Internet: http://www.math.ru.nl/~souvi/groepen_04