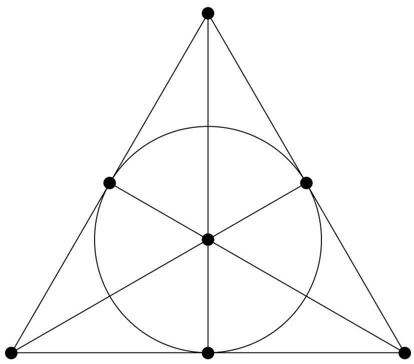
Opgaven 2

Opgave 4.
Geef voor elk van de platonische lichamen (tetraëder, hexaëder/kubus, octaëder, dodecaëder, icosaëder) alle typen van kleuringen van de hoekpunten, ribben en zijvlakken aan, zo dat de actie van de volledige rotatie groep van het lichaam ook een groeps actie op de kleuren geeft.

Opgave 5.
Het projectieve vlak $PG(2,2)$ van orde 2 (ook bekend als *Fano plane*) heeft als *punten* de 1-dimensionale deelruimtes van $\mathbb{F}_2^3$ en als *lijnen* de 2-dimensionale deelruimtes.

(i) Laat zien dat $PG(2,2)$ zeven punten en zeven lijnen bevat, dat twee punten steeds een lijn eenduidig bepalen, twee lijnen zich in precies een punt snijden, een lijn steeds drie punten bevat en een punt steeds op drie lijnen ligt.

Een plaatje van $PG(2,2)$ kan er dus als volgt uitzien, waarbij de cirkel de zevende lijn is.



(ii) Een *automorfisme* van $PG(2,2)$ is een permutatie van de punten van $PG(2,2)$ die lijnen op lijnen afbeeldt. Zij $G := Aut(PG(2,2))$ de volledige automorfisme groep, dan is $G \leq S_7$.

Laat zien dat de actie van $GL_3(2)$ of $\mathbb{F}_2^3$ een ondergroep van G geeft. Bewijs dat deze actie van $GL_3(2)$ op $PG(2,2)$ 2-voudig transitief is.

(iii) Bewijs dat de actie van $GL_3(2)$ uit (ii) al de volledige automorfisme groep G geeft. Concludeer dat $|G| = 168$. Ga na dat $G \leq A_7$, dus dat alle elementen van G even permutaties zijn.

(iv) Bepaal de actie van A_7 op de 15 restklassen van A_7/G. Dit mag met de MAGMA functie `CosetImage`, maar kan ook met de hand met behulp van een BSGS. Laat zien dat deze actie primitief is en concludeer dat G een maximale ondergroep van A_7 is.

Internet: http://www.math.ru.nl/~souvi/groepen_04