Opgaven 3

Opgave 6.
De groep G is gegeven door de presentatie

$$G := \langle x, y \mid x^4, y^4, x^2 = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle.$$

Bepaal de orde van G, een normaalvorm (bijvoorbeeld $x^i y^j$ met zekere beperkingen voor i en j) voor de elementen van G en het isomorfisme type van G.

Opgave 7.
Bewijs dat de rotatie groep van de octaëder (en dus ook van de kubus) de presentatie $\langle x, y \mid x^3, y^2, (xy)^4 \rangle$ heeft. (Het is natuurlijk bekend dat de groep isomorf met S_4 is.)

Opgave 8.
Bepaal de abelse invarianten van de groep $G := \langle x, y \mid (x^2y^3)^3, (x^3y)^4 \rangle$.

Opgave 9.
De *Fibonacci groep* $F(2, n)$ is gegeven door de presentatie

$$F(2, n) := \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \mid x_1x_2 = x_3, x_2x_3 = x_4, \ldots, x_{n-1}x_n = x_1, x_nx_1 = x_2 \rangle.$$

(i) Bepaal de commutator factorgroep en het isomorfisme type van $F(2, 4)$.

(ii) Bepaal de abelse invarianten van de commutator factorgroep van $F(2, n)$, dus van $F(2, n)/F(2, n)'$.

Opgave 10.
De *Heisenberg groep* H is de matrix groep $H := \{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \}$.

(i) Laat zien dat H voortgebracht is door $X := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Y := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $Z := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Ga na dat de voortbrengers X, Y, Z aan de presentatie $G = \langle x, y, z \mid [x, y] = z, [z, x], [z, y] \rangle$ voldoen en concludeer dat H een factorgroep van G is.

(iii) Bewijs dat $H \cong G$ door te laten zien dat de elementen $g \in G$ op de vorm $g = x^a y^b z^c$ met $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gebracht kunnen worden.

(iv) Bepaal de commutator factorgroep H/H' van H.

Internet: http://www.math.ru.nl/~souvi/groepen_04