Kansrekening voor Informatiekunde (I00051)

Bernd Souvignier

voorjaar 2005

Inhoud

Les 1 Combinatoriek

Als we het over de *kans* hebben dat iets gebeurt, hebben we daar wel intuïtief een idee over, wat we hiermee bedoelen. Bijvoorbeeld zeggen we, dat bij het werpen van een munt de kans $\frac{1}{2}$ is, dat de zijde met cijfer (munt) boven te liggen komt, evenzo als de kans voor de koningin (kop) $\frac{1}{2}$ is. Op een soortgelijke manier behandelen we het werpen van een dobbelsteen: de kans voor elke van de getallen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ is $\frac{1}{6}$, maar we kunnen ook iets over de kans zeggen, dat we een even getal werpen, die is namelijk de som van de kansen voor 2, 4 en 6, dus $\frac{1}{2}$.

Het algemeen principe dat hier achter zit, is dat er een aantal mogelijke uitkomsten is, en we een deel hiervan als *gunstige* uitkomsten aanzien. De relatieve frequentie van gunstige uitkomsten interpreteren we dan als kans voor een gunstige uitkomst.

Principe van de relatieve frequentie: *De kans op een gunstige uitkomst berekenen we als het aantal gunstige uitkomsten gedeeld door het totaal aantal mogelijke uitkomsten.*

Het Simpson paradox

Soms kan zelfs het bepalen van kansen met behulp van relatieve frequenties tot verrassingen leiden. Stel we hebben een fruithandelaar die sinaasappels van minstens $100g$ per stuk wil verkopen. Hij heeft twee leveranciers, A en B, van sinaasappels.

In een eerste levering krijgt hij van A 110 sinaasappels waarvan er 50 te licht zijn en van B 70 sinaasappels waarvan 30 te licht zijn. Op dit moment zou hij ervan uit gaan dat B de betere leverancier is, omdat $\frac{5}{11} > \frac{3}{7}$ is.

Een week later krijgt hij van A een levering van 90 sinaasappels waarvan 60 te licht zijn en van B 140 sinaasappels waarvan 90 te licht zijn. Ook in dit geval is B de betere leverancier, want $\frac{6}{9} > \frac{9}{14}$.

Maar als we nu de twee leveringen bij elkaar nemen, waren bij A 110 van 200 sinaasappels te licht, terwijl bij B 120 van 210 sinaasappels te licht waren. Er geldt $\frac{11}{20} < \frac{12}{21}$, dus is over de twee weken gezien A de betere leverancier!

Het probleem is, dat we uit de twee leveringen apart kunnen concluderen dat $\frac{5}{11} + \frac{6}{9} > \frac{3}{7} + \frac{9}{14}$. Maar als we de leveringen gezamenlijk vergelijken, moeten we $\frac{5+6}{11+9}$ met $\frac{3+9}{7+14}$ vergelijken, en dat is niet de som van de breuken.

1.1 Tellen van uitkomsten

Om goed over kansen en kansverdelingen te kunnen praten, moeten we kijken, hoe we bij iets ingewikkeldere problemen dan het werpen van een dobbelsteen gunstige uitkomsten kunnen tellen. De kunst van het tellen van uitkomsten heet *combinatoriek*.

Bij het dobbelen met drie dobbelstenen kunnen we ons afvragen of de kans groter is dat de som van de ogen 11 of 12 is. Hiervoor moeten we 11 of 12 schrijven als sommen van drie getallen uit de verzameling $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. We hebben

$$11 = 6+4+1 = 6+3+2 = 5+5+1 = 5+4+2 = 5+3+3 = 4+4+3$$

$$12 = 6+5+1 = 6+4+2 = 6+3+3 = 5+5+2 = 5+4+3 = 4+4+4$$

dus zijn er in elk geval 6 mogelijkheden en de kans lijkt even groot te zijn. Maar als we dit in een experiment na gaan (bijvoorbeeld met een computersimulatie), zien we dat de kans voor de som 11 ongeveer $P(11) = 0.125$ is en de kans voor de som 12 ongeveer $P(12) = 0.116$, dus kleiner dan die voor de som 11. Wat is hier mis gegaan?

Bij het tellen van de mogelijkheden hebben we alleen maar afstijgende sommen opgeschreven, maar als we even aannemen dat de drie dobbelstenen rood, blauw en groen zijn, is het duidelijk dat er verschillende manieren zijn, hoe we $6+4+1$ kunnen krijgen. De 6 kan namelijk op elke van de drie dobbelstenen verschijnen en in elk van deze drie gevallen hebben we nog twee mogelijkheden om 4 en 1 op de andere twee dobbelstenen te verdelen. We moeten dus de som $6+4+1$ zes keer tellen, omdat er zes verschillende manieren zijn hoe we deze som kunnen krijgen. Bij een som met twee verschillende getallen (zo als $5+5+1$) hebben we drie mogelijkheden en bij drie dezelfde getallen alleen maar eentje. Als we de mogelijkheden voor de som 11 zo bepalen vinden we $3\cdot 6+3\cdot 3 = 27$ mogelijkheden en voor de som 12 krijgen we $3\cdot 6+2\cdot 3+1 = 25$. Omdat er $6^3 = 216$ mogelijke uitkomsten met drie dobbelstenen zijn, is de kans voor de som 11 dus $\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$ en die voor som 12 is $\frac{25}{216}$, en dit is wat we ook experimenteel zouden vinden.

Het belangrijke punt bij dit voorbeeld is, dat we de dobbelstenen kunnen onderscheiden en dat we daarom op de volgorde van de resultaten moeten letten. Het is afhankelijk van het experiment of we inderdaad op de volgorde willen letten of niet. Bijvoorbeeld zijn we bij een qualiteitscontrole alleen maar geïnteresseerd hoeveel slechte stukken we in een steekproef hebben, maar niet of de eerste of de laatste in de steekproef slecht is.

1.2 Geordende grepen

We gaan eerst na hoe we het aantal uitkomsten berekenen als de volgorde een rol speelt, dus als we het resultaat van de eerste greep en het resultaat van de tweede greep willen onderscheiden. Dit is bijvoorbeeld het geval voor het dobbelen met meerdere dobbelstenen, maar ook voor het toewijzen van nummers aan de spelers van een voetbalploeg.

Hier is een voorbeeld: Stel een exclusieve restaurant biedt een keuze van 4 voorgerechten, 3 hoofdgerechten en 3 desserts. Je mag elke combinatie van de drie gangen kiezen, hoeveel mogelijke menu's kun je dan bestellen? Het is duidelijk dat je $4\cdot 3\cdot 3$ mogelijkheden hebt. Algemeen geldt:

Principe van de vermenigvuldiging van uitkomsten: *Het aantal uitkomsten voor een geordende greep is* $\prod_{i=1}^{r} n_i$ *als we* r *keer trekken en er voor de* i*-de greep* n_i *mogelijkheden zijn.*

Van dit principe zijn er twee heel belangrijke speciale gevallen, het trekken *met* en het trekken *zonder* terugleggen.

Trekken met terugleggen

Uit een verzameling van n objecten kiezen we r keer een element, waarbij we het getrokken element weer terugleggen. Dan hebben we voor elke keuze n mogelijkheden en het aantal uitkomsten is dus

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r} = n^r.$$

Dit is het aantal rijen $(a_1, \ldots, a_r)$ met $a_i \in \{1, \ldots, n\}$.

Trekken zonder terugleggen

Uit een verzameling van n objecten kiezen we r keer een element, maar een getrokken element wordt niet terug gelegd, dus is er na elke greep een element minder in de verzameling. Voor de eerste greep hebben we dus n mogelijkheden, voor de tweede $n-1$, voor de derde $n-2$ enzovoorts. Het aantal uitkomsten is dus

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Dit is het aantal rijen $(a_1, \ldots, a_r)$ met $a_i \in \{1, \ldots, n\}$ waarbij alle a_i verschillend zijn. In het bijzonder geldt:

Permutaties van n elementen: *Het aantal manieren hoe we de getallen* $\{1, \ldots, n\}$ *kunnen ordenen is gelijk aan* $n!$.

1.3 Ongeordende grepen

Bij veel toepassingen speelt de volgorde geen rol, bijvoorbeeld als we alleen maar geïnteresseerd zijn hoeveel objecten met een bepaalde eigenschap in een steekproef zitten. Als de volgorde geen rol speelt, kunnen we de elementen in de rij van getrokken elementen omordenen en zo ervoor zorgen dat ze in een zekere volgorde zitten. Op die manier zijn de uitkomsten van een ongeordende greep alleen maar de rijen $(a_1, \ldots, a_r)$ met $a_i \leq a_{i+1}$.

Merk op: Hier ligt een bron van mogelijke verwarring : Bij een *ongeordende greep* mogen we de elementen *omordenen* en krijgen dan een *geordende* rij.

Ook voor de ongeordende grepen zijn er weer twee mogelijkheden: We kunnen met of zonder terugleggen trekken. Omdat het geval zonder terugleggen eenvoudiger is, gaan we dit eerst bekijken.

Trekken zonder terugleggen

Het misschien meest bekende voorbeeld van een ongeordende greep zonder terugleggen is het trekken van de lottogetallen. Hierbij worden de ballen met de nummers weliswaar achter elkaar getrokken en we kunnen de ballen ook onderscheiden, maar op het eind worden de nummers in opstijgende volgorde gesorteerd, daarom speelt het geen rol in welke volgorde de nummers getrokken werden en de greep is dus ongeordend.

We hebben gezien, dat er $\frac{n!}{(n-r)!}$ mogelijke uitkomsten van een geordende greep zonder terugleggen zijn. Maar van zo'n greep zijn er precies $r!$ permutaties en alleen maar één van deze permutaties heeft de eigenschap dat de elementen opstijgend geordend zijn. Dus is het aantal uitkomsten voor ongeordende grepen zonder terugleggen

$$\frac{1}{r!} \cdot \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} =: \binom{n}{r}.$$

We noemen $\binom{n}{r}$ een *binomiaalcoëfficiënt* en spreken dit 'n over r'. De binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{r}$ geeft aan op hoeveel manieren we een deelverzameling van r elementen uit een verzameling van n elementen kunnen kiezen. Dit is hetzelfde als het aantal rijen $(a_1, \ldots, a_r)$ met $a_i \in \{1, \ldots, n\}$ en $a_i < a_{i+1}$. Merk op dat de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{r} = 0$ voor $r > n$, omdat we geen r elementen uit $n < r$ kunnen kiezen.

In het geval van de lottogetallen is $n = 49$ en $r = 6$ (we negeren even extra- en supergetallen), dus is het aantal mogelijke uitkomsten van de lotto $\binom{n}{r} = 13983816$, dus bijna 14 miljoen.

Een andere samenhang waar we de binomiaalcoëfficiënt tegen komen (en waar ook de naam vandaan komt), is bij veeltermen: De (algemene) binomische formule is

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r} = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

dus bijvoorbeeld $(a+b)^4 = b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4$. Het is geen toeval dat de binomiaalcoëfficiënt hier naar voren komt: Als we het product $(a+b)^n$ uitschrijven als $(a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)$ en dan uitvoerig vermenigvuldigen krijgen we een term $a^r b^{n-r}$ als we in r van de factoren a kiezen en in de $n-r$ andere factoren b. Maar het aantal manieren om de r factoren met a uit de n factoren te kiezen is $\binom{n}{r}$, daarom wordt dit de coëfficiënt van $a^r b^{n-r}$.

We kunnen makkelijk een paar belangrijke eigenschappen van de binomiaalcoëfficiënten afleiden:

(i) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Dit volgt meteen uit de definitie, omdat we alleen maar de factoren in de noemer omruilen. Maar we kunnen het ook anders inzien: Als we r uit de n elementen van een verzameling hebben gekozen, dan hebben we $n-r$ elementen niet gekozen, dus hoort bij elke deelverzameling van r elementen een eenduidige deelverzameling van $n-r$ elementen, dus is het aantal deelverzamelingen met r elementen gelijk aan het aantal deelverzamelingen met $n-r$ elementen. We noemen dit ook de *symmetrie* van de binomiaalcoëfficiënten.

(ii) $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$

Dit volgt uit de binomische formule als we $a = b = 1$ invullen. Maar we kunnen dit ook uit het aftellen van deelverzamelingen zien: Een verzameling Ω van n elementen heeft $\binom{n}{r}$ deelverzamelingen met r elementen, dus is de som over de binomiaalcoëfficiënten het aantal van alle deelverzamelingen van Ω. Maar elk element $a \in \Omega$ is of in een deelverzameling $A \subseteq \Omega$ bevat of is er niet in bevat. Dit geeft 2 mogelijkheden voor elk element en dus 2^n mogelijkheden om de uitkomsten $a \in A$ of $a \notin A$ op de n elementen van Ω te verdelen en dus zijn er 2^n deelverzamelingen van Ω.

(iii) $\displaystyle\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$

Hiervoor tellen we de $\binom{n+1}{r}$ deelverzamelingen $A \subseteq \{1, \ldots, n+1\}$ met r elementen op de volgende manier: Of het element $n+1$ ligt in een deelverzameling A, dan bevat A nog $r-1$ elementen uit de resterende n elementen en er zijn dus $\binom{n}{r-1}$ mogelijkheden voor A. Of het element $n+1$ zit niet in de deelverzameling A, dan zijn de r elementen van A uit de resterende n elementen gekozen en hiervoor zijn er $\binom{n}{r}$ mogelijkheden.

Een handige manier om de binomiaalcoëfficiënten op te schrijven (en uit te rekenen) is de *driehoek van Pascal* die in Figuur 1 afgebeeld is. In de driehoek van Pascal heeft de eerste rij één element, de tweede heeft twee elementen enz., de n-de rij heeft dus n elementen. Als r-de element in de n-de rij schrijven we de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n-1}{r-1}$. Merk op dat $\binom{0}{0} = 1$ omdat $0! = 1$ is. De formule $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$ zegt nu dat we een element op een zekere plek in de driehoek van Pascal krijgen door de twee direct links en rechts boven dit element staande binomiaalcoëfficiënten op te tellen zo als in Figuur 1 voor het element $\binom{6}{2}$ aangetoond.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Figuur 1: Driehoek van Pascal

Trekken met terugleggen

Als we na een greep het getrokken element weer terugleggen maar niet op de volgorde letten, willen we het aantal rijen $(a_1, \ldots, a_r)$ bepalen met $a_i \in$

$\{1, \ldots, n\}$ en $a_i \leq a_{i+1}$. Merk op dat we het aantal van dit soort rijen niet zo makkelijk uit het aantal van geordende rijen kunnen bepalen, omdat het aantal permutaties van een rij met herhalingen ervan afhangt hoeveel elementen hetzelfde zijn.

Maar hier komen we met een trucje en het resultaat voor het trekken zonder terugleggen verder: Stel we hebben een rij $(a_1, \ldots, a_r)$ met $a_i \leq a_{i+1}$, dan kunnen we hieruit een rij zonder herhalingen maken door $(i-1)$ bij het element a_i op te tellen. Dit geeft de rij $(b_1, \ldots, b_r)$ waarbij $b_i = a_i + i - 1 < a_{i+1} + i = b_{i+1}$. Voor de elementen b_i geldt $1 \leq b_i \leq n + r - 1$, dus hoort deze rij bij een ongeordende greep zonder terugleggen uit $n + r - 1$ elementen.

Omgekeerd kunnen we uit elke rij $(b_1, \ldots, b_r)$ met $b_i < b_{i+1}$ door aftrekken van $(i-1)$ van het element b_i een rij $(a_1, \ldots, a_r)$ maken met $a_i \leq a_{i+1}$. We zien dus dat er even veel rijen $(a_1, \ldots, a_r)$ zijn met $1 \leq a_i \leq n$ en $a_i \leq a_{i+1}$ als er rijen $(b_1, \ldots, b_r)$ zijn met $1 \leq b_i \leq n + r - 1$ en $b_i < b_{i+1}$. Maar we hebben gezien dat het aantal van het laatste soort rijen gelijk is aan

$$\binom{n+r-1}{r}$$

dus is dit ook het aantal van ongeordende r-grepen met terugleggen.

We hebben nu vier soorten van grepen gezien, namelijk geordende en ongeordende grepen die we telkens met of zonder terugleggen kunnen bekijken. Dit kunnen we overzichtelijk in een 2×2-schema beschrijven:

	geordend	ongeordend
met terugleggen	I	III
zonder terugleggen	II	IV

Deze vier gevallen kunnen we als volgt karakteriseren:

I: Noteer de uitslag van elke greep en leg terug $\Rightarrow n^r$ uitkomsten.

II: Noteer de uitslag van elke greep en leg niet terug $\Rightarrow \frac{n!}{(n-r)!} = \binom{n}{r} r!$ uitkomsten.

III: Noteer voor elke $a \in \Omega$ alleen maar het aantal grepen die a opleveren en leg terug $\Rightarrow \binom{n+r-1}{r}$ uitkomsten.

IV: Noteer voor elke $a \in \Omega$ alleen maar het aantal grepen die a opleveren en leg niet terug $\Rightarrow \binom{n}{r}$ uitkomsten.

Het Verjaardagsparadox

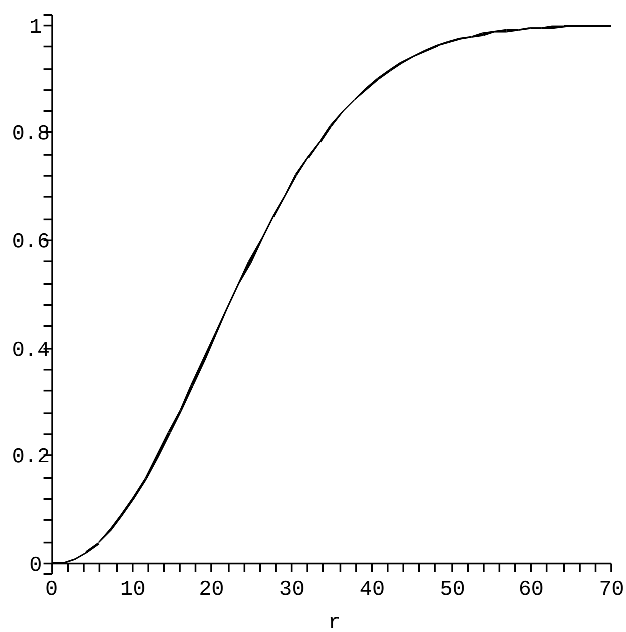
We willen de kans berekenen, dat er in en groep van r mensen twee mensen op dezelfde dag jarig zijn. Als verzameling nemen we de verzameling van verjaardagen, dus $|\Omega| = 365$ (we nemen aan dat niemand op 29 februari jarig is). Voor het aantal mogelijke uitkomsten zijn we in geval I, omdat we de mensen kunnen onderscheiden, dus het aantal is 365^r. Nu gebruiken we een klein trucje: We bepalen de kans van het complement van de gewenste uitkomst, dus we bepalen de kans dat alle r mensen verschillende verjaardagen hebben. Dan zijn we voor de gunstige uitkomsten in geval II, want een verjaardag van één persoon mag niet meer het verjaardag van een andere persoon zijn. Er zijn dus $\binom{365}{r} r!$ gunstige uitkomsten (d.w.z. alle verjaardagen zijn verschillend). Bij elkaar genomen is de kans dat twee mensen op dezelfde dag jarig zijn dus

$$p = 1 - \frac{\binom{365}{r} r!}{365^r}.$$

Hier zijn een paar waarden van p voor verschillende grootten r van de groep:

$$\begin{array}{rr} r = 2 \Rightarrow p = 0.003, & r = 5 \Rightarrow p = 0.027, \\ r = 10 \Rightarrow p = 0.117, & r = 15 \Rightarrow p = 0.253, \\ r = 20 \Rightarrow p = 0.411, & r = 23 \Rightarrow p = 0.507, \\ r = 25 \Rightarrow p = 0.569, & r = 30 \Rightarrow p = 0.706, \\ r = 50 \Rightarrow p = 0.970, & r = 70 \Rightarrow p = 0.999. \end{array}$$

In Figuur 2 zie je de functie, die de kans op twee mensen met dezelfde verjaardag afhankelijk van de grootte r van de groep aangeeft. Omdat veel mensen het verrassend vinden dat de kans al voor $r = 23$ groter dan 0.5 is, noemt men dit ook het *verjaardagsparadox*. Er laat zich aantonen dat in het algemeen voor $r \approx \sqrt{n}$ geldt dat r grepen uit n objecten met kans $\frac{1}{2}$ twee dezelfde resultaten opleveren.



Figuur 2: Kans op dezelfde verjaardag bij r mensen

Belangrijke begrippen in deze les

- relatieve frequentie
- permutaties van n elementen
- geordende en ongerordende grepen
- grepen met en zonder terugleggen
- binomiaalcoëfficiënt
- verjaardagsparadox

Opgaven

1. We dobbelen met twee dobbelstenen. Bepaal de kansen voor de volgende uitkomsten:

   (i) De som van de twee getallen is 5.
   (ii) Beide dobbelstenen tonen een oneven getal.
   (iii) De eerste dobbelsteen toont een kleiner getal dan de tweede.
   (iv) De som van de twee getallen is even.
   (v) De som van de twee getallen is minstens 4.
   (vi) De som van de twee getallen is of even of minstens 4 (of allebei).

   De absolute waarde van het verschil van de twee getallen ligt tussen 0 en 5. Geef de kansverdeling $P(k)$ aan dat bij een worp met twee dobbelstenen de absolute waarde van het verschil precies k is.

2. Bij het *Poker* spel krijg je 5 kaarten uit een kaartspel met 52 kaarten. Verschillende combinaties van kaarten hebben een bijzondere waarde:

   (i) tweeling: twee kaarten van dezelfde soort (bijvoorbeeld twee boeren),
   (ii) dubbele tweeling: twee verschillende tweelingen (bijvoorbeeld twee vrouwen en twee azen),
   (iii) drieling: drie kaarten van dezelfde soort,
   (iv) vierling: vier kaarten van dezelfde soort,
   (v) full house: een tweeling en een drieling,
   (vi) straight: vijf kaarten in de goede volgorde (bijvoorbeeld 9, 10, boer, vrouw, heer),
   (vii) straight flush: een straight van dezelfde kleur.

   Bepaal voor elke van deze combinaties de kans en breng de combinaties hierdoor in een volgorde van opstijgende waarde.

3. Bij het skaat spel krijg je 10 kaarten uit een kaartspel met 32 kaarten. Om een solo te spelen wil je van één kleur veel kaarten hebben en een andere kleur helemaal niet. We vereenvoudigen het probleem door de boeren als gewone kaarten te tellen. Hoe groot is de kans dat je een blad krijgt waarbij je van elke kleur minstens 2 kaarten hebt (zo iets is meestal een slecht blad)?

   Als je een solo speelt, krijg je er nog 2 kaarten bij en leg je aansluitend weer 2 van je 12 kaarten weg. Hoe groot is de kans, dat je nu alleen nog met 2 kleuren zit (wat meestal een goed blad is)?

4. Een groep van 18 personen verdeeld zich in een restaurant over drie tafels van 4, 6 en 8 plaatsen. Hoeveel verschillende arrangements zijn er, als de plaatsing aan een tafel geen rol speelt?

5. Je spreekt met een vriend af om op de volgende dag in de rij te staan om kaarten voor Bruce Springsteen (of AC/DC of David Helfgott) te kopen. Op een gegeven moment staan jullie allebei in de rij, maar hebben elkaar niet gezien. Hoe groot is de kans, dat in een rij van n mensen precies r mensen tussen jullie staan? Hoe groot is de kans dat jullie elkaar kunnen zien als er 1000 mensen in de rij staan en je aanneemt dat je je vriend onder de 100 mensen naast je kunt herkennen?