Tentamen I00051

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine voor de uitwerking van numerieke resultaten (zo als $\sqrt{\pi}$ of $\log(2)$) is toegestaan, maar niet het gebruik van de statistische functies.

Opgave 1. (30 punten)
Een verzekeringsmaatschappij verzekert de auto's van even veel vrouwen en mannen. Uit onderzoek is gebleken, dat een man met kans p_m per jaar (bijvoorbeeld $p_m = 5\%$) een schadeclaim indient, en een vrouw met kans p_v (bijvoorbeeld $p_v = 2\%$) en dat deze kansen onafhankelijk ervan zijn, of een chauffeur in eerdere jaren claims had of niet.

(i) De verzekeraar kiest willekeurig een van de verzekerde personen. Wat is de kans dat deze chauffeur in dit jaar een schadeclaim indient? Wat is de kans dat deze chauffeur in twee op elkaar volgende jaren een schadeclaim indient?

(ii) Een persoon heeft een schade gemeld. Wat is de kans dat de persoon een vrouw is? Bereken deze kans algemeen en voor de speciale waarden $p_m = 5\%$ en $p_v = 2\%$.

(iii) Voor een willekeurig gekozen chauffeur zij A het gebeurtenis dat hij/zij in het jaar 2005 een claim indient, en B het gebeurtenis dat hij/zij in het jaar 2006 een schade meldt. Wat geeft de voorwaardelijke $P(B \mid A)$ kans aan? Bereken deze voorwaardelijke kans. Is deze kans voor de speciale waarden $p_m = 5\%$ en $p_v = 2\%$ groter, kleiner of gelijk aan de kans $P(B)$? Hoe kan je dit resultaat verklaren?

Opgave 2. (25 punten)
Op een groot bouwterrein zijn er gemiddeld 4 ziekmeldingen per dag. Alhoewel dit geen helemaal realistische aanname is, gaan we ervan uit dat ziekmeldingen volgens een *Poisson-proces* gebeuren.

(i) Wat is de kans dat er op maandag hoogstens 3 mensen ziek zijn?

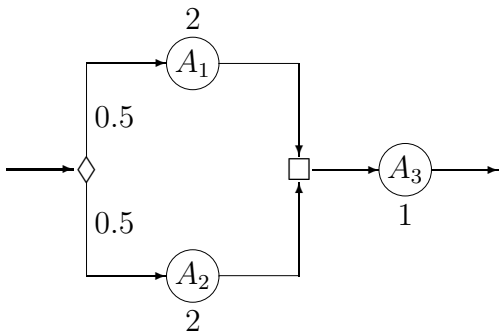
(ii) Wat is de kans dat er in een (5-daagse) werkweek op elke dag minstens 4 mensen ziek zijn?

(iii) Wat is de kans dat er op minstens 2 dagen van de werkweek hooguit 2 mensen ziek zijn?

(iv) Op maandag waren er 8 ziekmeldingen. De directeur van de aannemer is hier heel blij mee, omdat er op maandag slecht weer was en hij voor de resterende vier dagen van de week nu slechts nog $\frac{1}{4}(5 \cdot 4 - 8) = 3$ ziekmeldingen per dag verwacht. Is zijn redenering gegrond?

z.o.z.

Opgave 3. (45 punten)
We bekijken een systeem met het aangegeven netwerk van drie componenten. Als A_1 en A_2 beide werken, wordt bij de *of-splitsing* toevallig (dus met kans 0.5) een van de twee componenten gekozen, als een van de twee componenten defect is, wordt natuurlijk de andere gekozen.



De componenten A_1, A_2 en A_3 hebben exponentieel verdeelde leeftijden met parameters λ_1, λ_2 en λ_3.

(Een component met exponentieel verdeelde leeftijd met parameter λ heeft op tijdstip t een betrouwbaarheid van $R(t) = e^{-\lambda t}$ en een verwachte leeftijd van $\int_0^\infty R(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$.)

(i) Bepaal de betrouwbaarheid van het systeem op tijdstip t.

(ii) Bepaal de verwachte leeftijd van het systeem.

(iii) Neem nu aan dat de componenten A_1 en A_2 een verwachte leeftijd van 5 jaar en A_3 een verwachte leeftijd van 10 jaar heeft. Wat is de verwachte leeftijd van het systeem?

Door een investering van 1000 € kan je de verwachte leeftijd van één van de componenten om 1 jaar verlengen. Wat is de maximale verwachte leeftijd die je met een investering van 1000 € kunt bereiken en welke component moet je hiervoor vervangen?

De componenten A_1 en A_2 hebben *typische* verwerkingstijden van 2 seconden en A_3 een typische verwerkingstijd van 1 seconde, maar de werkelijke kansverdeling voor de verwerkingstijd T door een component met typische verwerkingstijd t is

$$P(T = t) = 0.6, \quad P(T = t + 1) = 0.3, \quad P(T = t + 2) = 0.1.$$

(iv) Bereken de kansverdeling voor de verwerkingstijd door het hele systeem.

(v) Hoeveel van de opdrachten wordt in hoogstens 5 seconden verwerkt en in welke tijd worden minsten 95% van de opdrachten verwerkt?

(vi) Stel je hebt een toevalsgenerator die een uniforme verdeling op het interval $[0, 1]$ produceert. Hoe kun je hiermee de verwerking van opdrachten door de component A_3 simuleren?

Succes ermee!