

Hertentamen I00051

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine voor de uitwerking van numerieke resultaten (zo als $\sqrt{\pi}$ of $\log(2)$) is toegestaan, maar niet het gebruik van de statistische functies.

Opgave 1. (25 punten)

Een verzekeringsmaatschappij verzekert de auto's van even veel vrouwen en mannen. Uit onderzoek is gebleken, dat een man met kans p_m per jaar (bijvoorbeeld $p_m = 7\%$) een schadeclaim indient, en een vrouw met kans p_v (bijvoorbeeld $p_v = 4\%$). Verder is gevonden dat deze kansen zowel voor mannen als voor vrouwen onafhankelijk ervan zijn, of een chauffeur in eerdere jaren claims had of niet.

- (i) Wat is de verwachte kans dat een willekeurig gekozen chauffeur in dit jaar een schadeclaim indient? Wat is de verwachte kans dat een willekeurig gekozen chauffeur in twee op elkaar volgende jaren een schadeclaim indient?
- (ii) Een persoon heeft een schade gemeld. Wat is de kans dat de persoon een vrouw is? Bereken deze kans voor algemene waarden p_m en p_v en voor de speciale waarden $p_m = 7\%$ en $p_v = 4\%$.
- (iii) Voor een willekeurig gekozen chauffeur zij A het gebeurtenis dat hij/zij in het jaar 2006 een claim indient, en B het gebeurtenis dat hij/zij in het jaar 2007 een schade meldt. Wat geeft de voorwaardelijke $P(B \mid A)$ kans aan? Bereken deze voorwaardelijke kans. Is deze kans voor de speciale waarden $p_m = 7\%$ en $p_v = 4\%$ groter, kleiner of gelijk aan de kans $P(B)$? Hoe kan je dit resultaat verklaren?

Opgave 2. (30 punten)

Uit een vaas met een blauwe, twee witte en drie oranje knikkers trekken we zonder terugleggen zes keer een knikker. De stochast X beschrijft het *rangnummer* van de trekking van de blauwe knikker (dus $X = 2$ betekent dat we de blauwe knikker bij de tweede trekking pakken) en de stochast Y geeft het rangnummer van de eerste trekking van een oranje knikker aan.

- (i) Zijn de stochasten X en Y onafhankelijk? (Licht je antwoord toe.)
- (ii) Bereken de verwachtingswaarden $E(X)$ en $E(Y)$ van de stochasten X en Y .
- (iii) Bereken de varianties $Var(X)$ en $Var(Y)$ van de stochasten X en Y .
- (iv) De stochast Z krijgt de waarde 0 als X een kleinere waarde heeft dan Y en Z krijgt de waarde 1 als X een grotere waarde heeft dan Y . Bepaal de kansverdeling van Z .

Z.O.Z.

Opgave 3. (25 punten)

Het opbellen van Joseph S. Blatter met klachten over de scheidsrechters bij het WK gebeurt volgens een Poisson-proces met een intentsiteit van 2 per uur.

- (i) Wat is de kans dat er binnen een helft (van 45 minuten) van een match minstens één persoon opbelt?
- (ii) De zenuwen van de heer Blatter zijn al erg gespannen. Als er binnen een helft (van 45 minuten) van een match meer dan 3 personen opbellen, zou hij echt ontploffen. Wat is de kans dat dit gaat gebeuren?
- (iii) Wat is de kans dat er tijdens een volledig match van 90 minuten met 15 minuten pauze en verlenging van 30 minuten niemand opbelt?
- (iv) Stel dat er in de eerste helft van een match inderdaad niemand heeft opgebeld. Is dan de kans dat er in de tweede helft iemand opbelt groter, kleiner of gelijk aan de in (i) berekende kans? Licht je antwoord toe.

Opgave 4. (20 punten)

Bij een zekere ziekte wordt een test toegepast die aangeeft of iemand de ziekte wel of niet heeft. Het is bekend dat gemiddeld 1 in de 1000 personen de ziekte heeft.

- (i) Over de test is bekend dat hij bij zieke personen met een nauwkeurigheid van 95% het resultaat **ziek** geeft en bij gezonde personen met nauwkeurigheid 98% het resultaat **gezond**.

Wat is de kans dat iemand met het testresultaat **ziek** daadwerkelijk ziek is?

- (ii) Stel we willen de test zodanig verbeteren, dat mensen niet onnodig verontrust worden. Als doel hebben we dat minder dan de helft van de personen met het testresultaat **ziek** in werkelijkheid gezond zijn. Aan de nauwkeurigheid bij zieke personen kunnen we helaas niets veranderen.

Hoe groot moet de nauwkeurigheid van de test bij gezonde personen worden, opdat een persoon met het resultaat **ziek** de ziekte daadwerkelijk met kans 50% heeft?

Gegevens voor stochasten X met belangrijke verdelingen:

verdeling	kans	$E(X)$	$Var(X)$
hypergeometrisch	$h(n, m, s; k) = \frac{\binom{s}{k} \cdot \binom{n-s}{m-k}}{\binom{n}{m}}$	$m \cdot \frac{s}{n}$	$m \cdot \frac{s}{n} \left(1 - \frac{s}{n}\right) \frac{n-m}{n-1}$
binomiaal	$b(m, p; k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$	$m \cdot p$	$m \cdot p(1-p)$
Poisson	$po_{\lambda}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
exponentieel	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normaal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

Succes ermee!