

Hertentamen I00051

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine voor de uitwerking van numerieke resultaten (zo als $\sqrt{\pi}$ of $\log(2)$) is toegestaan, maar niet het gebruik van de statistische functies.

Opgave 1. (25 punten)

Uit een vaas met een rode, een witte en drie zwarte knikkers trekken we zonder terugleggen vijf keer een knikker. De stochast X beschrijft het *rangnummer* van de trekking van de witte knikker (dus $X = 2$ betekent dat we de witte knikker bij de tweede trekking pakken) en de stochast Y geeft het rangnummer van de eerste trekking van een zwarte knikker aan.

- (i) Zijn de stochasten X en Y onafhankelijk? (Licht je antwoord toe.)
- (ii) Bereken de verwachtingswaarden $E(X)$ en $E(Y)$ van de stochasten X en Y .
- (iii) Bereken de varianties $Var(X)$ en $Var(Y)$ van de stochasten X en Y .
- (iv) De stochast Z krijgt de waarde 0 als X een kleinere waarde heeft dan Y en Z krijgt de waarde 1 als X een grotere waarde geeft dan Y . Bepaal de kansverdeling van Z .

Opgave 2. (20 punten)

Een verzekeringsmaatschappij verzekert de auto's van even veel vrouwen en mannen. Uit onderzoek is gebleken, dat een man met kans p_m per jaar (bijvoorbeeld $p_m = 7\%$) een schadeclaim indient, en een vrouw met kans p_v (bijvoorbeeld $p_v = 4\%$). Verder is gevonden dat deze kansen zowel voor mannen als voor vrouwen onafhankelijk ervan zijn, of een chauffeur in eerdere jaren claims had of niet.

- (i) Wat is de verwachte kans dat een willekeurig gekozen chauffeur in dit jaar een schadeclaim indient? Wat is de verwachte kans dat een willekeurig gekozen chauffeur in twee op elkaar volgende jaren een schadeclaim indient?
- (ii) Een persoon heeft een schade gemeld. Wat is de kans dat de persoon een vrouw is? Bereken deze kans voor algemene waarden p_m en p_v en voor de speciale waarden $p_m = 7\%$ en $p_v = 4\%$.
- (iii) Voor een willekeurig gekozen chauffeur zij A de gebeurtenis dat hij/zij in het jaar 2005 een claim indient, en B de gebeurtenis dat hij/zij in het jaar 2006 een schade meldt. Wat geeft de voorwaardelijke $P(B \mid A)$ kans aan? Bereken deze voorwaardelijke kans. Is deze kans voor de speciale waarden $p_m = 7\%$ en $p_v = 4\%$ groter, kleiner of gelijk aan de kans $P(B)$? Hoe kan je dit resultaat verklaren?

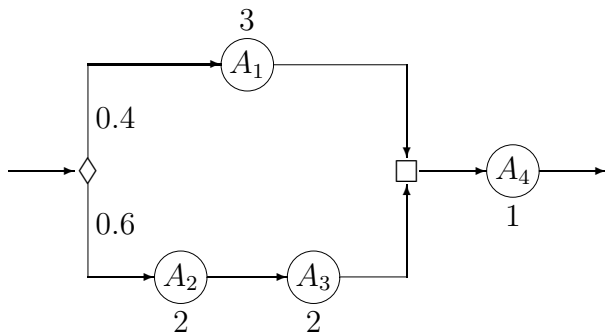
Opgave 3. (20 punten)

De toevalsbus stopt op een willekeurig tijdstip tussen 12.30 en 12.45 uur op de Heyendaalse Weg. Je zelf zult ook op een willekeurig tijdstip binnen dit kwartiertje aan de bushalte op komen dagen.

- (i) Wat is de kans dat je de bus te pakken krijgt als je hooguit 5 minuten wacht?
- (ii) Je zult alleen maar om 12.30 uur het geduld hebben om 5 minuten te wachten. Je geduld neemt lineair zodanig af dat je om 12.45 helemaal niet meer wacht (dus zal je om 12.35 uur nog $3\frac{1}{3}$ en om 12.40 uur nog $1\frac{2}{3}$ minuten wachten). Wat is in dit geval de kans dat je met de bus gaat rijden?

Opgave 4. (35 punten)

We bekijken een systeem met het aangegeven netwerk van vier componenten. De betrouwbaarheid van component A_i noteren we met R_i .



- (i) Bepaal de betrouwbaarheid van het systeem (afhankelijk van de R_i).
- (ii) Stel dat de componenten A_1 , A_2 en A_3 betrouwbaarheid 70% hebben en A_4 betrouwbaarheid 90%. Wat is in dit geval de betrouwbaarheid van het systeem?

Door een investering kun je of de betrouwbaarheid van één van de drie componenten A_1 , A_2 , A_3 van 70% tot 90% verhogen of twee van deze componenten op een betrouwbaarheid van 80% brengen. Hoe bereik je een maximale betrouwbaarheid van het systeem en wat is deze betrouwbaarheid?

Veronderstel nu dat alle componenten werken en dat bij de *of*-splitsing de twee alternatieven zo als aangegeven met kansen 0.4 en 0.6 gekozen worden. De aangegeven verwerkingstijden (3 seconden voor A_1 , 2 seconden voor A_2 en A_3 en 1 seconde voor A_4) zijn alleen maar *typische* verwerkingstijden, de werkelijke verwerkingstijd door een component met een typische verwerkingstijd van t seconden is t seconden met kans 0.7 en $t + 1$ seconden met kans 0.3.

- (iii) Bereken de kansverdeling voor de verwerkingstijd door het hele systeem.
- (iv) Wat is de verwachtingswaarde voor de verwerkingstijd door het systeem?
- (v) Hoeveel van de opdrachten wordt in hoogstens 6 seconden verwerkt en in welke tijd worden minsten 95% van de opdrachten verwerkt?

Succes ermee!