

Tentamen I00051

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine voor de uitwerking van numerieke resultaten (zo als $\sqrt{\pi}$ of $\log(2)$) is toegestaan, maar niet het gebruik van de statistische functies.

Opgave 1. (25 punten)

Je dobbelt met twee rare dobbelstenen: de eerste dobbelsteen is een tetraëder (dus regelmatig met 4 zijvlakken) met de cijfers 1 t/m 4, de tweede dobbelsteen is een octaëder (dus regelmatig met 8 zijvlakken) met de cijfers 1 t/m 8.

- (i) De stochast X geeft het maximum van de twee dobbelstenen aan. Bepaal de kansverdeling en de verwachtingswaarde van X .
- (ii) Stel iemand pakt willekeurig (dus met kans 0.5) één van de twee dobbelstenen, dobbelt (zonder dat je het kunt zien) en roept zijn resultaat tegen jou. Als het resultaat 5 of hoger is, kan je natuurlijk concluderen dat hij de octaëder heeft gepakt.
 - (a) Wat is de kans dat hij de tetraëder heeft gepakt als het resultaat tussen 1 en 4 ligt?
 - (b) Als hij nu drie keer met de willekeurig gepakte dobbelsteen dobbelt en alle drie resultaten tussen 1 en 4 liggen, wat is dan de kans dat hij de tetraëder heeft gepakt?

Opgave 2. (30 punten)

Uit een vaas met een rode, een witte en drie zwarte knikkers trekken we zonder terugleggen vijf keer een knikker. De stochast X beschrijft het *rangnummer* van de trekking van de witte knikker (dus $X = 2$ betekent dat we de witte knikker bij de tweede trekking pakken) en de stochast Y geeft het rangnummer van de eerste trekking van een zwarte knikker aan.

- (i) Zijn de stochasten X en Y onafhankelijk? (Licht je antwoord toe.)
- (ii) Bereken de verwachtingswaarden $E(X)$ en $E(Y)$ van de stochasten X en Y .
- (iii) Bereken de varianties $Var(X)$ en $Var(Y)$ van de stochasten X en Y .
- (iv) De stochast Z krijgt de waarde 0 als X een kleinere waarde heeft dan Y en Z krijgt de waarde 1 als X een grotere waarde heeft dan Y . Bepaal de kansverdeling van Z .

Opgave 3. (25 punten)

In het gebied van de Azoren ontstaan nieuwe grote vulkanen bij benadering volgens een Poisson-proces met een gemiddelde tussentijd van 50 jaar.

- (i) Bereken de kans dat er in de komende 10 jaar minstens één nieuwe grote vulkaan ontstaat.
- (ii) Wat is de kans dat er in de komende 100 jaar zelfs drie nieuwe grote vulkanen ontstaan?
- (iii) De kans dat helemaal geen nieuwe vulkaan ontstaat, wordt voor grotere tijdsintervallen natuurlijk steeds kleiner. Voor welk tijdsinterval is de kans dat er geen nieuwe vulkaan ontstaat gelijk aan 50%.
- (iv) Stel we weten dat in de laatste 40 jaar geen nieuwe grote vulkaan is ontstaan. Is dan de kans dat er in de komende 10 jaar minstens één nieuwe grote vulkaan ontstaat groter dan de in (i) berekende kans? Geef een reden voor je antwoord.

Opgave 4. (20 punten)

Je wilt een experiment met een stochast X simuleren die een driehoeksverdeling heeft en beschreven wordt door de dichtheidsfunctie

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{als } x \in [-1, 0]; \\ 1-x & \text{als } x \in [0, 1]; \\ 0 & \text{als } x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Je hebt een randomgenerator ter beschikking die uniform verdeelde toevalsgetallen $U_1, U_2, U_3, \dots$ op het interval $[0, 1]$ produceert.

- (i) Maak een schets van de dichtheidsfunctie en van de verdelingsfunctie van de stochast X .
- (ii) Beschrijf een manier om met behulp van de randomgenerator de stochast X te simuleren.

Gegevens voor stochasten X met de aangegeven verdelingen:

verdeling	kans	$E(X)$	$Var(X)$
hypergeometrisch	$h(n, m, s; k) = \frac{\binom{s}{k} \cdot \binom{n-s}{m-k}}{\binom{n}{m}}$	$m \cdot \frac{s}{n}$	$m \cdot \frac{s}{n} \left(1 - \frac{s}{n}\right) \frac{n-m}{n-1}$
binomiaal	$b(m, p; k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$	$m \cdot p$	$m \cdot p(1-p)$
Poisson	$po_{\lambda}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
exponentieel	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normaal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

Succes ermee!