Hoofdstuk 2

Roosters

We hebben de 2-dimensionale roosters expliciet kunnen klassificeren en de symmetriegroepen hiervan bepaald. Als we hetzelfde probleem in de 3-dimensionale ruimte aanpakken, kunnen we natuurlijk de klassificatie van 2-dimensionale roosters toepassen. Twee vectoren uit de roosterbasis van een 3-dimensionaal rooster brengen immers een 2-dimensionaal rooster voort en we moeten alleen maar de verhouding van de derde vector van de roosterbasis met dit 2-dimenionale rooster analyseren.

Dit was de manier hoe de verschillende types van roosters historisch zijn gevonden. Het probleem is, dat we aan de ene kant moeten waarbogen dat we geen geval missen, aan de andere kant moeten we ook steeds aantonen dat twee roosters niet equivalent zijn.

In plaats van roosters kunnen we ook naar de ruimtes van invariante vormen kijken. Deze zijn van de vorm $\{\begin{pmatrix} a & c & e \\ & b & f \\ & & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\}$, waarbij de linksboven 2×2-deelmatrix de ruimte van invariante vormen voor een 2-dimensionaal rooster aangeeft (bijvoorbeeld $c = 0$ voor de rechthoekrooster of $a = b$ en $2c = a$ voor het hexagonale rooster). We moeten nu nagaan wat er gebeurd als we voor de nieuwe parameters d, e en f algemene of speciale waarden invullen. Hier wordt al een probleem duidelijk: Voor de lengte d zijn $d = a$ of $d = b$ zeker speciale waarden en voor de inproducten de waarden $e = 0$ en $f = 0$, maar het is niet duidelijk of er nog andere speciale waarden zijn. Verder is het mogelijk door verschillende keuzes van speciale waarden dezelfde roosters te produceren.

In principe is het mogelijk op deze manier tot de klassificatie van de 14 types van roosters in dimensie 3 te komen (en dit was ook de oorspronkelijke methode), maar het is geen echt prettige manier en vergt de analyse van een hoop speciale gevallen.

We zullen in deze cursus een iets andere aanpak kiezen. In dit hoofstuk kijken we naar fundamentele eigenschappen van roosters die ertoe leiden, over equivalentie van roosters te kunnen beslissen. In een later hoofstuk ontwikkelen we een methode hoe we vanuit de mogelijke symmetriegroepen nieuwe roosters kunnen produceren zo dat we uiteindelijk een volledige lijst krijgen.

2.1 Compatibele bases

We spreken voor deze sectie de volgende notaties af: Zij $L \subseteq \mathbb{R}^n$ een vol rooster met roosterbasis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ en Gram matrix $F = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Met $\tilde{B}$ noteren we de $n \times n$-matrix die als i-de kolom de i-de basisvector b_i heeft. Dan geldt in het bijzonder dat $F = \tilde{B}^{tr} \cdot \tilde{B}$.

Het feit dat we van een *vol* rooster uitgaan is geen echte beperking, we kunnen een rooster L steeds als vol rooster in zijn $\mathbb{R}$-opspansel opvatten.

2.1 Definitie De verzameling

$$C(B) := \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid 0 \le a_i < 1\}$$

heet de (open) elementaire cel van L met betrekking tot B.

Het is duidelijk dat de nulvector het enige element van L is dat in $C(B)$ ligt, aan de andere kant laat zich voor iedere vector $v = \sum_{i=1}^{n} c_i b_i \in \mathbb{R}^n$ een roostervector v' vinden, zo dat $v - v' \in C(B)$, te weten $v' = \sum_{i=1}^{n} \lfloor c_i \rfloor b_i$ (waarbij we met $\lfloor x \rfloor$ het grootste gehele getal $\le x$ noteren. Hieruit volgt dat $C(B)$ een systeem van representanten van de restklassenruimte $\mathbb{R}^n/L$ is.

Uit de regel voor substitutie bij de integratie van meerdere veranderlijken volgt dat $vol(C(B)) = |\det(\tilde{B})| = \sqrt{\det(F)}$ is, en dit volume noemen we de *discriminant* van L. Natuurlijk moeten we hiervoor laten zien dat het volume onafhankelijk van de keuze van de basis is.

2.2 Lemma *De* discriminant $d(L) := vol(C(B)) = |\det(\tilde{B})| = \sqrt{\det(F)}$ *is onafhankelijk van de gekozen roosterbasis B.*

Bewijs: Als B' een andere roosterbasis van L is, dan is de Gram matrix F' van L met betrekking tot B' gegeven door $F' = T^{tr} F T$, waarbij T de basis transformatie van B naar B' is, en dus $T \in GL_n(\mathbb{Z})$. Maar hieruit volgt $\det(T) = \pm 1$ en dus $\det(F') = (\pm 1)^2 \det(F) = \det(F)$. □

Let op: In de literatuur wordt naast de *discriminant* vaak ook de *determinant* van een rooster gedefinieerd. Meestal is dit het kwadraat van de discriminant, dus $\det(L) = d(L)^2 = \det(F)$, maar dit is niet altijd het geval.

2.3 Propositie *Voor een deelrooster $L' \le L$ van eindige index geldt*

$$[L : L'] = \frac{d(L')}{d(L)}.$$

Met de juiste interpretatie geldt de relatie $[L : L'] = \frac{d(L')}{d(L)}$ ook voor het geval dat L' oneindige index in L heeft. In dit geval is L' namelijk een rooster van kleinere rang dan L en de elementaire cel van L' heeft volume 0 in de n-dimensionale ruimte.

Het bewijs van de propositie volgt uit de Hoofdstelling over eindig voortgebrachte abelse groepen, aangepast voor de situatie van roosters.

2.4 Hoofdstelling over eindig voortgebrachte abelse groepen
Zij A een eindig voortgebrachte abelse groep, dan is

$$A \cong C_{d_1} \times C_{d_2} \times \ldots \times C_{d_r} \times \mathbb{Z}^s$$

met $d_i \mid d_{i+1}$ (waarbij C_m de cyklische groep van orde m aangeeft). De getallen r, s en d_i zijn eenduidig bepaald.

Op roosters toegepast geeft de Hoofdstelling een belangrijke uitspraak over de bases van twee roosters die in elkaar bevat zijn.

2.5 Propositie *Laten $L' \leq L$ twee roosters zijn, dan is er een roosterbasis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ van L en getallen $d_1, \ldots, d_r$ met $r \leq n$ en $d_i \mid d_{i+1}$ zo dat $B' = (d_1 b_1, \ldots, b_r d_r)$ een roosterbasis van L' is.*

In het bijzonder geldt in het geval $r = n$ dat $[L : L'] = \prod_{i=1}^n d_i$ en $vol(C(B')) = \prod_{i=1}^n d_i \cdot vol(C(B)$, en dus $[L : L'] = \frac{d(L')}{d(L)}$.

Bewijs: Volgens de Hoofdstelling is $L/L' \cong C_{d_1} \times \ldots \times C_{d_r} \times \mathbb{Z}^s$ en we kiezen voortbrengers $a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_n$ van L/L' die aan deze decompositie aangepast zijn, dus $\langle a_i \rangle \cong C_{d_i}$ voor $i \leq r$ en $\langle a_{r+1}, \ldots, a_n \rangle \cong \mathbb{Z}^s$. Maar de elementen a_i zijn restklassen van de vorm $a_i = b_i + L'$ met $b_i \in L$ en als we voor iedere a_i een representant b_i van de restklasse a_i kiezen, is $B = (b_1, \ldots, b_n)$ een basis met de gewenste eigenschappen. □

2.6 Definitie Voor twee roosters L en L' met $L' \leq L$ noemen we roosterbases $B = (b_1, \ldots, b_n)$ en $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ *compatibele bases* als $b'_i = d_i b_i$ met $d_i \mid d_{i+1}$ voor alle i.

We kunnen ook een algoritme aangeven, waarmee we voor twee roosters compatibele bases expliciet kunnen bepalen. Hiervoor schrijven we een roosterbasis van L' als coördinaatvectoren met betrekking tot de roosterbasis van L. Deze coördinaatvectoren schrijven we als kolommen in een matrix A, dan geldt $|\det(A)| = [L : L']$.

Met behulp van elementaire (geheeltallige) rij- en kolomoperaties brengen we A op diagonaalvorm, waarbij de diagonaalelementen delers van elkaar moeten zijn, we bepalen dus matrices $P, Q \in GL_n(\mathbb{Z})$ zo dat

$$P \cdot A \cdot Q = D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \text{ met } d_i \mid d_{i+1}.$$

De diagonaalmatrix D heet de *Smith normaal vorm* van A.

Het idee voor het bepalen van de Smith normaal vorm is heel simpel: Met elementaire rij- en kolomoperaties kunnen we ervoor zorgen, dat het element A_{11} vervangen wordt door $d_1 = \mathrm{ggd}(A_{ij} \mid 1 \le i, j \le n)$. Vervolgens kunnen we met behulp van d_1 de rest van de eerste rij en kolom tot 0 transformeren (vegen). De resterende $(n-1) \times (n-1)$-matrix (vanaf rij- en kolomindex 2) heeft nu elementen die alle veelvouden zijn van d_1 en door iteratie vinden we de gewenste diagonaalvorm D.

De matrix Q werkt op de kolommen van A en bevat dus de transformatie van de basis van L', de matrix van P werkt op de rijen van A en bevat dus de basistransformatie voor de basis van L. Wegens $P^{-1}D = AQ$ zijn de kolommen van P^{-1} en van AQ compatibele bases voor L en L'. In feite is het niet eens nodig, de matrix P te inverteren, want de basis van L wordt verkregen door de i-de kolom van AQ door d_i te delen.

Merk op dat we P en Q tijdens het transformeren van A bijna cadeau krijgen door de rijoperaties en kolomoperaties apart op twee eenheidsmatrices toe te passen, de rijoperaties geven dan P en de kolomoperaties geven Q.

2.7 Voorbeeld We willen compatibele bases voor het standaardrooster $\mathbb{Z}^3$ en het deelrooster $L' = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ bepalen.

We schrijven de eenheidsmatrices voor de rij- en kolomoperaties links en rechts onder de matrix A en passen de operaties simultaan op A en op deze matrices toe.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eerste kolom van tweede en derde kolom aftrekken

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eerste rij van tweede en derde rij aftrekken

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tweede en derde kolom met -1 vermenigvuldigen en verruilen

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

We hebben dus als basis voor L' de kolommen van

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dus zijn $B = (b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ en $B' = (b_1, 2b_2, 2b_3)$ compatibele bases voor $\mathbb{Z}^3$ en L'.

Opdracht 4 (Uitdaging)
We weten dat voor twee roosters $L_1, L_2 \le \mathbb{R}^n$ met $L_2 \le L_1$ steeds compatibele bases bestaan. Hoe zit het met drie roosters $L_3 \le L_2 \le L_1$?

Laat zich steeds een roosterbasis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ van L_1 vinden zo dat L_2 een roosterbasis $B' = (c_1 b_1, \ldots, c_n b_n)$ heeft met $c_i \mid c_{i+1}$ en L_3 een roosterbasis $B'' = (d_1 b_1, \ldots, d_n b_n)$ met $d_i \mid d_{i+1}$ en $c_i \mid d_i$?

Ga na dat dit voor de drie roosters $L_1 = \langle e_1, e_2, \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3) \rangle$, $L_2 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle (= \mathbb{Z}^3)$, $L_3 = \langle e_1 + e_2, e_2 + e_3, 2e_3 \rangle$ inderdaad lukt (waarbij (e_1, e_2, e_3) de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ is).

Kan je een tegenvoorbeeld vinden waar het niet lukt (of een bewijs dat compatibele bases voor drie roosters inderdaad altijd bestaan)? •

2.2 Pakking dichtheid

2.8 Definitie Zij L een rooster.

(i) $\|v\|^2 = v \cdot v$ heet de *norm* van v. De norm is het kwadraat van de Euclidische lengte van de vector.

(ii) $\mu := \min(L) := \{\min(v \cdot v) \mid 0 \neq v \in L\}$ heet het *minimum* van L.

(iii) $S(L) := \{v \in L \mid v \cdot v = \mu\}$ is de verzameling van *minimale vectoren* van L. Het aantal $\tau := \#S(L)$ heet de *kissing number* (raak getal) van L.

(iv) Algemeen noteren we met $S(L, m)$ de vectoren met norm m en met $N(m)$ het aantal vectoren in $S(L, m)$. Er geldt dus $S(L) = S(L, \mu)$ en $\tau = N(\mu)$.

Een arrangement van kogels die hun middelpunten op roosterpunten hebben en die elkaar niet overlappen noemt men een *rooster pakking*. Voor $\mu = \min(L)$ heet $\rho := \frac{1}{2}\sqrt{\mu}$ de *pakking straal* van L. Dit is de maximale straal die kogels van een rooster pakking kunnen hebben. Het raak getal τ is juist het aantal kogels van straal ρ in een rooster pakking die de kogel om een roosterpunt raken.

We kunnen nu nagaan hoe veel van de ruimte door kogels rond de roosterpunten overdekt kan worden. Hoe groter dit deel van de ruimte is, hoe dichter noemen we de rooster pakking. Om dit te kunnen berekenen, hebben we het volume van een n-dimensionale kogel nodig.

2.9 Lemma *Een n-dimensionale kogel van straal r heeft het volume $V_n r^n$, waarbij*

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!} = \frac{\pi^m}{m!} \text{ voor } n = 2m \text{ even}$$

en

$$V_n = \frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} (\frac{n-1}{2})!}{n!} = \frac{2^{m+1}\pi^m}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m+1)} \text{ voor } n = 2m+1 \text{ oneven.}$$

Bewijs: Inductie over n: Voor $n = 1$ en $n = 2$ is de uitspraak duidelijk. Met behulp van de recursie $\int \cos^k(x)\, dx = \frac{1}{k} \cos^{k-1}(x) \sin(x) + \frac{k-1}{k} \int \cos^{k-2}(x)\, dx$ volgt dat

$$V_{n+1} = 2 \int_0^1 V_n \sqrt{1-x^2}^n = 2V_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(u)\, du = 2V_n \frac{n}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(u)\, du.$$

Als n even is, volgt hieruit per iteratie dat

$$V_{n+1} = 2V_n \frac{n}{n+1} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\, du = 2V_n \frac{n}{n+1} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{2}{3}.$$

Voor n oneven volgt

$$V_{n+1} = 2V_n \frac{n}{n+1} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(u)\, du = 2V_n \frac{n}{n+1} \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}.$$

In beide gevallen volgt hieruit de bewering. □

2.10 Definitie Zij L een rooster met minimum μ en pakking straal $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{\mu}$.

(i) De *dichtheid* van een rooster pakking is gedefinierd als de verhouding $\Delta := \Delta(L) = \frac{V_n \rho^2}{d(L)}$ van het volume van een kogel van straal ρ en het volume van een elementaire cel van L. De dichtheid geeft aan hoeveel van de ruimte door de kogels van een rooster pakking overdekt is.

(ii) $\delta(L) := \frac{\Delta(L)}{V_n}$ heet de *middelpunt dichtheid* en geeft het aantal roosterpunten per eenheidsvolume aan. Er geldt $\delta(L) = \frac{\rho^n}{d(L)} = \frac{1}{2^n d(L)} \mu^{\frac{n}{2}}$.

(iii) $\gamma_n(L) := \frac{\mu}{d(L)^{\frac{2}{n}}} = 4\delta(L)^{\frac{2}{n}}$ heet de *Hermite invariante* van L.

Merk op dat $\Delta(L)$, $\delta(L)$ en $\gamma_n(L)$ invariant onder schalingen van L zijn.

Het supremum van $\gamma_n(L)$ over alle n-dimensionale rooster heet de *Hermite constante in dimensie n*. De waarde van γ_n is bekend voor $n \leq 8$, de rooster met de maximale waarde zijn de wortelroosters $A_1, A_2, A_3, D_4, D_5, E_6, E_7, E_8$.

2.2.1 Hermite ongelijkheid

Voor de Hermite invariante $\gamma_n(L)$ van een rooster L met Gram matrix F geldt $\gamma_n(L) := \frac{\min(L)}{\det(F)^{\frac{1}{n}}}$.

We kunnen een bovengrens voor de Hermite constante γ_n afleiden uit een algemener resultaat, dat vaak handig is, namelijk de *Hermite ongelijkheid*.

2.11 Propositie *(Hermite ongelijkheid)*
Zij L een n-dimensionaal rooster, dan bestaat er een roosterbasis $(b_1, \ldots, b_n)$ van L met

$$\prod_{i=1}^{n} \|b_i\|^2 \leq (\frac{4}{3})^{\frac{n(n-1)}{2}} \det(F).$$

Het bewijs van de Hermite ongelijkheid berust op het volgende eenvoudige Lemma.

2.12 Lemma *Zij $v \in L$ een minimale vector en zij π_v de orthogonale projectie op $v^\perp$. Dan bestaat voor iedere $x' \in \pi_v(L)$ een vector $x \in L$ die x' als projectie heeft en waarvoor geldt dat $\|x\|^2 \leq \frac{4}{3}\|x'\|^2$.*

Bewijs: Zij x een willekeurig origineel van x'. Er geldt $x - \pi_v(x) = cv$ en door vervangen van x door $x - v$ verandert $\pi_v(x)$ niet. Kies dus k met $|c - k| \leq \frac{1}{2}$ en vervang x door $x - kv$, dan is $x - \pi_v(x) = cv$ met $|c| \leq \frac{1}{2}$. Hieruit volgt $\|x\|^2 = \|cv + \pi_v(x)\|^2 = \|cv + x'\|^2 = \|cv\|^2 + \|x'\|$ omdat cv en x' loodrecht op elkaar staan. Omdat v een minimale vector is, is $\|cv\|^2 \leq \frac{1}{4}\|v\|^2 \leq \frac{1}{4}\|x\|^2$, dus volgt $\|x\|^2 \leq \frac{1}{4}\|x\|^2 + \|x'\|^2$ en dus $\frac{3}{4}\|x\|^2 \leq \|x'\|^2$. □

Bewijs: (Hermite ongelijkheid)
Inductie voor n: Voor $n = 1$ is $L = \langle b \rangle$ en $\det(F) = \|b\|^2$, en $(\frac{4}{3})^{\frac{n(n-1)}{2}} = 1$, dus valt er niets te bewijzen. Zij nu $n \geq 2$. Zij b een minimale vector van L en zij $L' = \pi_b(L)$ de orthogonale projectie van L loodrecht op b. Met inductie is er een basis $(b'_2, \ldots, b'_n)$ van L' met $\prod_{i=2}^{n} \|b'_i\|^2 \leq (\frac{4}{3})^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \det(F')$, waarbij we met F' de Gram matrix van L' noteren. Kies nu volgens het Lemma vectoren $b_i \in L$ met $\pi_b(b_i) = b'_i$ en $\|b_i\|^2 \leq \frac{4}{3}\|b'_i\|^2$. Dan is

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} \|b_i\|^2 &\leq \|b\|^2 \cdot \prod_{i=2}^{n} \frac{4}{3}\|b'_i\|^2 \leq \|b\|^2 (\frac{4}{3})^{n-1} (\frac{4}{3})^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \det(F') \\ &= (\frac{4}{3})^{\frac{n(n-1)}{2}} \|b\|^2 \det(F').\end{aligned}$$

We zijn klaar als we kunnen aantonen dat $(b, b_2, \ldots, b_n)$ een roosterbasis van L is en dat $\det(F) = \|b\|^2 \cdot \det(F')$.

Zij $v \in L$, dan is $\pi_b(v) = \sum_{i=2}^{n} c_i b'_i$ met $c_i \in \mathbb{Z}$. Uit $\pi_b(b_i) = b'_i$ volgt $\pi_b(v - \sum_{i=2}^{n} c_i b_i) = 0$, dus is $v' = v - \sum_{i=2}^{n} c_i b_i = cb \in L$. Maar omdat b een minimale vector is, moet $c = \pm 1$ zijn en dus is $v = \pm b + \sum_{i=2}^{n} c_i b_i$ een geheeltallige lineaire combinatie van $(b, b_2, \ldots, b_n)$ en dus is $(b, b_2, \ldots, b_n)$ een basis van L.

De basistransformatie van $(b, b_2, \ldots, b_n)$ naar de basis $(b, b'_2, \ldots, b'_n)$ van het rooster $\langle b\rangle \oplus L'$ is van de vorm $T = \begin{pmatrix} 1 & c_2 & \ldots & c_n \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ en heeft dus determinant 1, daarom is $d(L) = d(\langle b\rangle \oplus L')$ en dus $\det(F) = \|b\|^2 \cdot \det(F')$. □

2.3 Duale roosters

2.13 Definitie Zij $L \leq \mathbb{R}^n$ een rooster met roosterbasis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ en Gram matrix F.

(i) We noemen L een *geheel rooster* als $v \cdot w \in \mathbb{Z}$ voor alle $v, w \in L$. Een rooster is geheel als de Gram matrix F alleen maar gehele getallen bevat.

(ii) Een geheel rooster L heet een *even rooster* als $v \cdot v \in 2\mathbb{Z}$ voor alle $v \in L$. Een geheel rooster is even als alle diagonaalelementen van de Gram matrix F even zijn.

(iii) Zij $B^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ de duale basis van B in $\mathbb{R}^n$, d.w.z. $b_i \cdot b_j^* = \delta_{ij}$ voor $1 \leq i, j \leq n$ (waarbij $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$ en $\delta_{ij} = 0$ anders). Dan heet het rooster met B^* als roosterbasis het *duale rooster* van L en wordt met $L^\#$ genoteerd.

(iv) Een rooster L heet *zelfduaal* of *unimodulair* als $L^\# = L$ is.

Merk op dat we de duale ruimte $(\mathbb{R}^n)^* = Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ van lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$ met behulp van het standaardinproduct met $\mathbb{R}^n$ geidentificeerd hebben. Met betrekking tot de duale basis zijn de elementen van $(\mathbb{R}^n)^*$ namelijk $1 \times n$-matrices en het toepassen $\varphi(v)$ van zo'n matrix φ op een vector $v \in \mathbb{R}^n$ per matrixproduct is hetzelfde als het inproduct tussen de getransponeerde vector φ^{tr} en v.

2.14 Propositie *Zij $L \leq \mathbb{R}^n$ een geheel rooster met basis B en Gram matrix F en zij $L^\#$ het duale rooster van L.*

(i) $L^\#$ is gekarakteriseerd door $L^\# = \{w \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot w \in \mathbb{Z}$ voor alle $v \in L\}$, d.w.z. $L^\#$ is de verzameling van vectoren die geheeltallig inproduct met alle vectoren uit L hebben.

(ii) Er geldt $L \subseteq L^\#$ en F is de transformatiematrix van de duale basis B^* (die de roosterbasis van $L^\#$ is) naar de basis B.

(iii) Er geldt $[L^\# : L] = \det(F)$. De Smith normaal vorm van F geeft de isomorfie type van de plak groep *$L^\#/L$ aan. In het bijzonder is L zelfduaal dan en slechts dan als $\det(F) = 1$.*

Bewijs: (i): Een vector $v = \sum_{i=1}^n c_i b_i^*$ ligt in $L^\#$ dan en slechts dan als $v \cdot b_i = c_i \in \mathbb{Z}$ voor alle i.
(ii): Het is duidelijk dat $L \subseteq L^\#$, omdat L een geheel rooster is. Zij $\tilde{B}$ de matrix met de vectoren b_i als kolommen en $\tilde{B}^*$ de matrix met de b_i^* als kolommen. Aan de ene kant is $\tilde{B}^{tr} \cdot \tilde{B}^* = I$, dus $\tilde{B}^* = \tilde{B}^{-tr}$, aan de andere kant is $\tilde{B}^{tr} \cdot \tilde{B} = F$, dus geldt $\tilde{B} = \tilde{B}^{-tr} \cdot F = \tilde{B}^* \cdot F$.
(iii): De matrix F heeft als kolommen juist de coördinaten van de basis van L met betrekking tot de basis van $L^\#$. □

Opdracht 5 Zij $L := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ het rooster voortgebracht door vectoren naar drie hoekpunten van een kubus.

Bepaal de Gram matrix van F (met betrekking tot de aangegeven basis), geef een roosterbasis en de Gram matrix van het duale rooster $L^\#$ aan en vind compatibele bases voor $L^\#$ en L. •

Opdracht 6 Zij $L \leq \mathbb{R}^n$ een vol rooster en zij $L^\#$ het duale rooster van L.

(i) Laat zien dat $Aut(L) = Aut(L^\#)$.

(ii) Zij F de Gram matrix van L met betrekking tot de roosterbasis B van L en zij B^* de duale basis van B. Laat zien dat F^{-1} de Gram matrix van $L^\#$ m.b.t. B^* is.

(iii) Zij $G = \{g \in GL_n(\mathbb{Z}) \mid g^{tr} F g = F\}$ de automorfisme groep $Aut(L)$ van L, geschreven m.b.t. de basis B. Ga na dat voor $Aut(L^\#)$ geschreven m.b.t. de duale basis B^* geldt dat $Aut(L^\#) = \{g^{tr} \mid g \in G\}$.

•

2.3.1 Even zelfduale roosters

Een bijzonder mooie soort van roosters zijn even roosters die zelfduaal zijn. Er laat zich aantonen dat even zefduale roosters alleen maar in dimensies n met $8 \mid n$ bestaan. In dimensie 8 is er precies één van deze roosters, het wortelrooster $E_8 = D_8^+$ (het begrip wortelrooster en de notaties voor deze roosters zullen we in de volgende sectie nader toelichten). In dimensie 16 zijn er twee, het rooster D_{16}^+ en de directe som $E_8 \oplus E_8$, in dimensie 24 zijn er 24 roosters, de zogeheten *Niemeier roosters*, waaronder het beroemde *Leech rooster* Λ_{24}.

Met behulp van de theorie van *modulaire vormen* laat zich aantonen dat er in dimensie 32 meer dan 80 miljoen niet-equivalente even zelfduale roosters zijn.

Modulaire vormen zijn complexe functies $f(z)$ die onder transformaties van de vorm $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ met $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ voldoen aan de relatie $f(z) = (cz+d)^{-2k} f(\frac{az+b}{cz+d})$.

Via modulaire vormen laten zich de *Minkowski-Siegel massa constanten* M_n voor even zelfduale roosters berekenen, die gedefinieerd zijn door

$$M_n := \sum_{L \in \Omega} \frac{1}{|Aut(L)|},$$

waarbij Ω een verzameling van representanten van de equivalentie klassen van even zelfduale roosters in dimensie n is.

Voor $n = 8k$ geldt

$$M_n = \frac{|B_{4k}|}{2k} \prod_{j=1}^{4k-1} \frac{|B_{2j}|}{4j},$$

waarbij B_k de *Bernoulli getallen* zijn, gedefinieerd door de Taylor reeks $\frac{x}{e^x-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}$. In het bijzonder zijn de Bernoulli getallen rationale getallen.
Er geldt $B_{2j+1} = 0$ voor $j \geq 1$ en de eerste waarden voor B_k zijn $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{12} = -\frac{691}{2730}$.

Voorzicht: Sommige auteurs (bijvoorbeeld J.-P. Serre) definiëren de Bernoulli getallen door $\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} B'_k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$. De relatie met de definitie van boven is $B'_k = |B_{2k}|$.

De Bernoulli getallen spelen ook een rol bij de Riemann zeta functie $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Voor gehele getallen $k \geq 1$ geldt $\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} |B_{2k}| \pi^{2k}$.

Voor $n = 8, 16, 24, 32$ krijgt men nu de volgende resultaten:

8 : Er geldt $M_8 = |Aut(E_8)|^{-1}$.

16 : $M_{16} = |Aut(D_{16}^+|^{-1} + |Aut(E_8 \oplus E_8)|^{-1}$.

24 : Met de precieze rationale waarde van $M_{24} \approx 7.9367 \cdot 10^{-15}$ laat zich nagaan dat de lijst van de 24 Niemeier roosters volledig is.

Van de 24 roosters hebben 23 vectoren van norm 2, het Leech rooster Λ_{24} is het enige even zelfduale rooster in dimensie 24 met minimum 4.

32 : Er geldt $M_{32} \approx 4.0309 \cdot 10^7$, en omdat voor ieder rooster $|Aut(L)| \geq 2$ ($-id$ is altijd in $Aut(L)$ bevat), is $|Aut(L)|^{-1} \leq \frac{1}{2}$ en dus zijn er meer dan 80 miljoen niet-equivalente even zelfduale roosters.

Recent is er door Oliver D. King bewezen, dat de massa van roosters met minimum minstens 4 nog steeds ongeveer 5484461.50 is, hieruit volgt dat er meer dan 10 miljoen verschillende even zelfduale roosters in dimensie 32 zijn, die geen vectoren van norm 2 bevatten.

We zullen nu de meest interessante roosters E_8, D_{16}^+ en Λ_{24} kort beschrijven.

$\mathbf{E_8}$

Een roosterbasis voor $E_8 \leq \mathbb{Q}^8$ is

$$B = (e_1 + e_2, -e_1 + e_2, -e_2 + e_3, \ldots, -e_6 + e_7, \frac{1}{2}(e_1 + \ldots + e_8)).$$

Met betrekking tot deze basis heeft E_8 de Gram matrix

$$\begin{pmatrix} 2 &&&&&&& \\ 0 & 2 &&&&&& \\ -1 & -1 & 2 &&&&& \\ 0 & 0 & -1 & 2 &&&& \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 &&& \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 && \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Er zijn 240 vectoren van minimale lengte 2 in E_8. De automorfisme groep van E_8 heeft orde 696729600 en isomorfisme type $2.O(8)^+.2$ en bevat een ondergroep isomorf met $C_2^7 \rtimes S_8$ van index 135. Deze ondergroep is het semidirecte product van diagonaal matrices met een even aantal -1en (de C_2^7) en de permutatie matrices (de S_8).

$\mathbf{D_{16}^+}$

Een roosterbasis voor $D_{16}^+ \leq \mathbb{Q}^{16}$ is

$$B = (e_1 + e_2, -e_1 + e_2, -e_2 + e_3, \ldots, -e_{14} + e_{15}, \frac{1}{2}(e_1 + \ldots + e_{16})).$$

Met betrekking tot deze basis heeft D_{16}^+ de Gram matrix

$$\begin{pmatrix} 2 &&&&&&&&&&&&&&& \\ 0 & 2 &&&&&&&&&&&&&& \\ -1 & -1 & 2 &&&&&&&&&&&&& \\ 0 & 0 & -1 & 2 &&&&&&&&&&&& \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 &&&&&&&&&&& \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 &&&&&&&&&& \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 &&&&&&&&& \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 &&&&&&&& \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 &&&&&&& \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 &&&&&& \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 &&&&& \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 &&&& \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 &&& \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 && \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Er zijn 480 vectoren van minimale lengte 2 in D_{16}^+. De automorfisme groep van D_{16}^+ heeft orde 696729600 en is isomorf met $C_2^{15} \rtimes S_{16}$. Hierbij is de groep C_2^{15} de groep van diagonaal matrices met een even aantal -1en en S_{16} is de groep van permutatie matrices.

Λ_{24}

In dimensie 24 zijn er 24 even zelfduale roosters, waaronder 23 met minimum 2 en het Leech rooster Λ_{24} met minimum 4. Het Leech rooster is het rooster met de hoogste bekende dichtheid in dimensie 24 en het is zeer waarschijnlijk dat het inderdaad het dichtste rooster in deze dimensie is, maar dit is niet bewezen. Er is wel bekend dat het raak getal van Λ_{24} de maximal mogelijke waarde in dimensie 24 heeft.

Het *raak getal probleem* vraagt wat het maximale aantal van (even grote) kogels in dimensie n is die één vaste kogel kunnen raken. Voor rooster pakkings is het antwoord bekend voor dimensies $n \leq 9$ en voor $n = 24$. Voor algemene pakkings, d.w.z. voor pakkings waarbij de kogels niet noodzakelijk rond de middelpunten van punten van een rooster liggen, is het antwoord slechts in dimensies 1, 2, 3, 8 en 24 bekend. Voor dimensies $n \leq 8$ worden de hoogste bekende raak getallen met rooster pakkings bereikt, maar in dimensie 9 is er een niet-rooster pakking met raakgetal 306, terwijl het maximale raak getal voor een rooster pakking 272 is.

Het maximale raak getal in dimensie 2 is 6 en wordt door het hexagonale rooster bereikt, in dimensie 3 is het maximale raak getal 12 en wordt bereikt door het gewone pakking van sinaasappels zo als iedereen die zou stapelen.

Het verrassende feit dat de maximale raak getallen ook in dimensies 8 en 24 bekend zijn, hangt samen met de afzonderlijke roosters E_8 en Λ_{24}. Er laat zich aantonen dat een arrangement van 240 kogels rond een kogel in dimensie 8 eenduidig bepaald is, de kogels moeten noodzakelijk op de vectoren van minimale norm in E_8 liggen. Analoog moeten 196560 kogels rond een kogel in dimensie 24 noodzakelijk op de vectoren van minimale norm in het Leech rooster Λ_{24} liggen.

Om een constructie van het Leech rooster te beschrijven, hebben we de Golay-code $\mathcal{C}_{24}$ nodig. Deze code is een lineaire code van lengte 24 en dimensie 12 over $\mathbb{F}_2$. Hij wordt verkregen uit de Golay-code $\mathcal{C}_{23}$ van lengte 23 en dimensie 12 door aan ieder codewoord c een parity-check bit toe te voegen, dus 0 als het gewicht van c even is en 1 als het gewicht oneven is. (Het gewicht van een codewoord is het aantal componenten die niet 0 zijn.)

De code $\mathcal{C}_{23}$ is cyklisch, d.w.z. met een codewoord c is ook elke cyklische shift van de componenten weer een element van $\mathcal{C}_{23}$. Een vector die samen met zijn cyklische shifts $\mathcal{C}_{23}$ voortbrengt is

$$v = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1).$$

Hieruit krijgt men als basis voor $\mathcal{C}_{23}$ de rijen van de matrix

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1&1
\end{pmatrix}.$$

Door toevoegen van de parity-check bits krijgt men als basis voor $\mathcal{C}_{24}$ de rijen van de matrix

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1
\end{pmatrix}.$$

De code $\mathcal{C}_{24}$ zelfs is niet cyklisch. Hij heeft 1 codewoord van gewicht 0, 1 van gewicht 24, 759 codewoorden van gewicht 8 2576 codewoorden van gewicht 12 en 759 codewoorden van gewicht 16. In het bijzonder is de minimum afstand van codewoorden 8, daarom kan deze code $\lfloor \frac{8-1}{2} \rfloor = 3$ fouten verbeteren. Ook de kortere Golay-code $\mathcal{C}_{23}$ kan 3 fouten corrigeren, omdat hij minimum afstand 7 heeft.

Met behulp van de Golay-code $\mathcal{C}_{24}$ kunnen we nu eindelijk het Leech rooster Λ_{24} definiëren. Het Leech rooster is voortgebracht door vectoren van de vorm

$$\frac{1}{\sqrt{8}}(\mp 3, \pm 1, \ldots, \pm 1)^{tr}$$

en permutaties hiervan. Te tekens voor de componenten zijn hierbij als volgt: Voor een codewoord $c \in \mathcal{C}_{24}$ worden de bovenste tekens genomen voor de componenten van c die 1 zijn, op de andere componenten worden de onderste tekens genomen. Met de eerste basisvector van $\mathcal{C}_{24}$ krijgt men zo bijvoorbeeld de vector

$$(-3,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1,-1,1,-1,1,1,1,-1,-1,-1,1,1)^{tr}$$

en het codewoord met alle componenten 1 geeft de vector

$$(-3,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)^{tr}.$$

Een roosterbasis voor het Leech rooster zijn de kolommen van de matrix

$$\begin{pmatrix}
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
-4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

gedeeld door $\sqrt{8}$ en met betrekking tot deze basis heeft Λ_{24} de Gram matrix

$$\begin{pmatrix}
4 \\
0 & 4 \\
2 & 2 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\
0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 4 \\
0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \\
0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 4 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\
1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\
0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\
-1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 4 \\
-2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4
\end{pmatrix}$$

(waarbij de bovenste driehoek natuurlijk symmetrisch opgevuld moet worden).

Het aantal minimale vectoren van norm 4 in Λ_{24} is 196560. Hierbij zijn $2^7 \cdot 759 = 97152$ vectoren van de vorm $(\pm 2^8, 0^{16})$ met de 2en in de componenten waar een codewoord c van gewicht 8 in $\mathcal{C}_{24}$ $1en$ heeft en waarbij het aantal mintekens even is. Verder zijn er $24 \cdot 2^1 2 = 98304$ vectoren van de vorm $(\mp 3, \pm 1^{23})$ want er zijn 2^{12} codewoorden in $\mathcal{C}_{24}$. En er zijn $2^2 \cdot \binom{24}{2} = 1104$ vectoren van de vorm $(\pm 4^2, 0^{22})$, waarbij de posities en de tekens willekeurig gekozen mogen worden.

De automorfisme groep $Co_0 := Aut(\Lambda_{24})$ van het Leech rooster heeft orde $2^{22} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 = 8315553613086720000$ en heet de 0de groep van Conway. Het centrum van $Aut(\Lambda_{24})$ is een cyklische groep van orde 2 voortgebracht door $-id$ en modulo deze normaaldeler is $Co_0/C_2 \cong Co_1$, waarbij Co_1 een van de sporadische simpele groepen is (de 1de groep van Conway). We kunnen Co_1 realiseren als de actie op paren $\pm v$ van vectoren. De stabilisator in Co_1 van een paar $\pm v$ met $\|v\|^2 = 4$ geeft de 2de groep van Conway Co_2, die ook een sporadische simpele groep is, en de stabilisator van een paar met $\|v\|^2 = 6$ geeft de sporadisch simpele groep Co_3 (de 3de groep van Conway).

Omdat Λ_{24} 196560 minimale vectoren heeft, heeft Co_2 index 98280 in Co_1. Verder zijn er 16773120 vectoren van norm 6 in Λ_{24}, daarom heeft Co_3 index 8386560 in Co_1.

2.4 Wortelroosters

We hebben al verschillende voorbeelden van roosters met rare namen zo als A_2, D_4 of E_8 gezien. Dit zijn allemaal voorbeelden van *wortelroosters* die een aantal oneindige families vormen. Het begrip *wortel* komt uit de theorie van Lie algebra's, daarom zullen we dit hier kort toelichten.

2.4.1 Lie algebra's

2.15 Definitie Een *Lie algebra* $\mathcal{L}$ over een lichaam K is een K-vectorruimte $\mathcal{L}$ waarop een verdere bewerking $[x, y]$, het *Lie-haakje* gedefinieerd is, die voldoet aan:

(i) $[\cdot, \cdot]$ is bilineair, d.w.z. $[cx + y, z] = c[x, z] + [y, z]$ en $[x, cy + z] = c[x, y] + [x, z]$ voor alle $x, y, z \in \mathcal{L}$, $c \in K$;

(ii) $[x, x] = 0$ voor alle $x \in \mathcal{L}$;

(iii) er geldt de Jacobi identiteit $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$.

Uit $0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x]$ volgt meteen dat het Lie-haakje alternerend is, dus dat $[x, y] = -[y, x]$. Hiermee volgt dat $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = -[z, [x, y]] - [x, [y, z]] - [y, [z, x]]$, dus laat zich de Jacobi identiteit ook door $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ aangeven.

Merk op: In het algemeen geldt niet dat $[[x, y], z] = [x, [y, z]]$, d.w.z. een Lie algebra is in het algemeen *niet associatief.*

Notatie: Om een oerwoud van haakjes te voorkomen, schrijft men in plaats van $[[\ldots[[x_1, x_2], \ldots], x_{n-1}], x_n]$ eenvoudiger $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n]$ en noemt dit de *linksgenormeerde* notatie. Ongeveer even vaak wordt echter ook de rechtsgenormeerde notatie gebruikt. Merk op dat $[[x, y], [z, w]]$ nog links- nog rechtsgenormeerd is (maar wel een legaal element van $\mathcal{L}$).

Een ring A die ook een K-vectorruimte voor een lichaam K is heet een *associatieve K-algebra* als $(cx) \cdot y = c(x \cdot y) = x \cdot (cy)$ voor alle $x, y \in A$, $c \in K$ geldt. De meest voor de hand liggende voorbelden van associatieve algebra's zijn matrix ringen zo als $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Van een associatieve algebra A laat zich altijd een Lie algebra construëren door het Lie-haakje te definiëren als

$$[x, y] := x \cdot y - y \cdot x.$$

Het is duidelijk dat dit bilineair is en dat $[x, x] = 0$. Voor de Jacobi identiteit moet men het product gewoon uitschrijven en controleren dat inderdaad alle termen tegen elkaar wegvallen.

2.16 Definitie Laten M en N deelruimtes van $\mathcal{L}$ (als vectorruimte) zijn.

(i) De deelruimte $[M,N] \le \mathcal{L}$ is gedefinieerd door $[M,N] := \langle [x,y] \mid x \in M, y \in N \rangle$. Merk op dat we hier het opspansel van de Lie-haakjes nodig hebben, want een lineaire combinatie van Lie-haakjes is niet noodzakelijk te schrijven als Lie-haakje.

(ii) De deelruimte $M \le \mathcal{L}$ heet een *Lie-ideaal* of kort *ideaal* van $\mathcal{L}$ als $[M,\mathcal{L}] \subseteq M$.

Net zo als bij gewone ringen zijn ook bij Lie algebra's de Lie algebra's zonder idealen van bijzonder interesse en heten simpele Lie algebra's.

2.17 Definitie Een *simpele* Lie algebra is een Lie algebra $\mathcal{L}$ die geen Lie-idealen behalve de triviale idealen $\{0\}$ en $\mathcal{L}$ heeft.

Een directe som van simpele Lie algebra's heet *semisimpel*.

Een typisch voorbeeld van een simpele Lie algebra (over $\mathbb{R}$) is de *speciale lineaire Lie algebra*

$$sl_n(\mathbb{R}) := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{spoor}(X) = 0\}.$$

Merk op dat $\mathrm{spoor}(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_{ij}Y_{ji} = \mathrm{spoor}(YX)$, dus $\mathrm{spoor}(XY - YX) = 0$, dus is $sl_n(\mathbb{R})$ inderdaad afgesloten onder het Lie-haakje en dus een Lie algebra van dimensie $l^2 - 1$.

2.18 Definitie Voor ieder element $x \in \mathcal{L}$ is door $y \mapsto [x,y]$ een lineaire afbeelding of $\mathcal{L}$ gedefinieerd, die met $\mathrm{ad}\, x$ genoteerd wordt. De afbeelding

$$\mathrm{ad} : x \mapsto \mathrm{ad}\, x,\ \mathcal{L} \to End(\mathcal{L}) = \{\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{L} \mid \varphi \text{ is lineair}\}$$

die aan een element x de lineaire afbeelding $\mathrm{ad}\, x$ op $\mathcal{L}$ toevoegt, heet de *geadjungeerde representatie* van $\mathcal{L}$.

Een homomorfisme $\phi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ van Lie algebra's is een homomorfisme van de vectorruimtes die ook het Lie-haakje bewaart, dus met $\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$.

Met het Lie-haakje $[x,y] := xy - yx$ maken we van $End(V)$ een Lie algebra en we zien dat de geadjungeerde representatie een homomorfisme van Lie algebra's is, want

$$\begin{aligned}[]
[\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y](z) &= \mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}\, y(z) - \mathrm{ad}\, y\, \mathrm{ad}\, x(z) = \mathrm{ad}\, x([y,z]) - \mathrm{ad}\, y([x,z]) \\
&= [x,[y,z]] - [y,[x,z]] = -[[y,z],x] + [[x,z],y] = [[x,y],z] \\
&= \mathrm{ad}[x,y](z),
\end{aligned}$$

omdat volgens de Jacobi identiteit $[[x,y],z] = -[[y,z],x] - [[z,x],y]$.

De kern van de geadjungeerde representatie zijn de elementen $x \in \mathcal{L}$ met $[x,y] = 0$ voor alle $y \in \mathcal{L}$ en heet het *centrum* van $\mathcal{L}$, genoteerd met $Z(\mathcal{L})$. Dit is een ideaal van $\mathcal{L}$, want $[[x,z],y] = [0,y] = 0$ voor alle $z \in \mathcal{L}$.

Omdat een simpele Lie algebra $\mathcal{L}$ geen idealen heeft, geldt in dit geval $Z(\mathcal{L}) = 0$, en dus is ad injectief, dus $\mathrm{ad}(\mathcal{L}) \cong \mathcal{L}$.

De geadjungeerde representatie laat nog een verdere eigenschap van Lie algebra's zien. Er geldt $\mathrm{ad}\, x([y,z]) = [x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]] = [\mathrm{ad}\, x(y), z] + [y, \mathrm{ad}\, x(z)]$. Algemeen heet een lineaire afbeelding $\delta : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ die voldoet aan $\delta([y,z]) = [\delta(y), z] + [y, \delta(z)]$ een *derivatie* van $\mathcal{L}$. Merk op dat dit een soort product regels is, daarom de naam derivatie. Er geldt dus, dat $\mathrm{ad}\, x$ voor iedere $x \in \mathcal{L}$ een derivatie van $\mathcal{L}$ is. Voor semisimpele (en dus in het bijzonder voor simpele) Lie algebra's zijn alle derivaties van de vorm $\mathrm{ad}\, x$.

Als $\mathrm{ad}\, x$ nilpotent is, d.w.z. $(\mathrm{ad}\, x)^k = 0$ voor een $k \in \mathbb{N}$, kan men $\exp(\mathrm{ad}\, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathrm{ad}\, x)^n$ definiëren, omdat de som eindig is. Er laat zich dan aantonen dat de groep voortgebracht door de elementen $\exp(\mathrm{ad}\, x)$ een ondergroep van de groep van automorfismen van $\mathcal{L}$ is, en voor een semisimpele Lie algebra is deze ondergroep de samenhangscomponent van 1 van $Aut(\mathcal{L})$.

2.19 Definitie Als we een basis $(x_1, \ldots, x_n)$ voor $\mathcal{L}$ kiezen en de lineaire afbeeldingen $\mathrm{ad}\, x$ met betrekking tot deze basis als matrices schrijven, kunnen we met

$$\kappa(x,y) := \mathrm{spoor}(\mathrm{ad}\, x \cdot \mathrm{ad}\, y)$$

een bilineaire afbeelding definiëren, die de *Killing vorm* van $\mathcal{L}$ heet.

De *stelling van Killing en Cartan* zegt dat een Lie algebra $\mathcal{L}$ semisimpel is dan en slechts dan als de Killing vorm niet ontaard is, d.w.z. als $\kappa(x,y) = 0$ voor alle $y \in \mathcal{L}$ alleen maar voor $x = 0$.

Cartan ontbinding

Voor de structuur van simpele Lie algebra's over $\mathbb{C}$ speelt een zekere type van deelalgebra's een belangrijke rol, die *Cartan deelalgebra's* heten.

2.20 Definitie Een deelalgebra $\mathcal{H}$ van een Lie algebra $\mathcal{L}$ heet een Cartan deelalgebra als $\mathcal{H}$ voldoet aan:

(i) $\underbrace{[\mathcal{H}, \mathcal{H}, \ldots, \mathcal{H}]}_{r} = 0$ voor een zekere r, d.w.z. Lie-haakjes van lengte r zijn 0 (men noemt $\mathcal{H}$ dan nilpotent);

(ii) $[x, \mathcal{H}] \in \mathcal{H}$ voor alle $h \in \mathcal{H} \Rightarrow x \in \mathcal{H}$, d.w.z. $\mathcal{H}$ is zelfnormaliserend.

Er laat zich aantonen dat de Cartan deelalgebra's van een Lie algebra $\mathcal{L}$ geconjugeerd zijn onder een automorfisme van $\mathcal{L}$. De dimensie van de Cartan deelalgebra's heet de *rang* van $\mathcal{L}$. Voor de Lie algebra $sl_n(\mathbb{C})$ is de deelalgebra van diagonaalmatrices in $sl_n(\mathbb{C})$ een Cartan deelalgebra, de rang van $sl_n(\mathbb{C})$ is dus $n-1$ (want het spoor moet 0 zijn). In dit geval geldt natuurlijk $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 0$ en dit geldt in feite voor alle semisimpele Lie algebra's.

De cruciale rol van de Cartan deelalgebra $\mathcal{H}$ ligt in de *Cartan ontbinding* van een semisimpele Lie algebra $\mathcal{L}$: Omdat $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 0$, geldt dat de lineaire afbeeldingen $\mathrm{ad}\, h$ voor $h \in \mathcal{H}$ onderling verruilen, want $\mathrm{ad}\, h\, \mathrm{ad}\, h'(x) = [h,[h',x]] = -[h',[x,h]] - [x,[h,h']] = [h',[h,x]] = \mathrm{ad}\, h'\, \mathrm{ad}\, h(x)$. Een standaard resultaat uit de Lineaire Algebra zegt dat zich in dit gevel de matrices $\operatorname{ad} h$ voor $h \in \mathcal{H}$ (over $\mathbb{C}$) simultaan laten diagonaliseren.

2.21 Definitie Zij $\mathcal{L}$ een semisimple Lie algebra $\mathcal{L}$ over $\mathbb{C}$.

(i) De ontbinding
$$\mathcal{L} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{L}_{r_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{r_k}$$
waarbij de $\mathcal{L}_{r_i}$ 1-dimensionale eigenruimtes voor de actie van $\mathcal{H}$ zijn (d.w.z. $[\mathcal{H}, \mathcal{L}_{r_i}] \subseteq \mathcal{L}_{r_i}$ voor alle i) de *Cartan ontbinding* van $\mathcal{L}$.

(ii) De deelruimtes $\mathcal{L}_{r_i}$ heten *wortelruimtes* van $\mathcal{L}$.

(iii) Voor een voortbrenger e_r van een wortelruimte $\mathcal{L}_r$ geldt
$$[h, e_r] = r(h)e_r \text{ met } r(h) \in \mathbb{C}.$$
De functie $r : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ heet een *wortel* van $\mathcal{L}$ en is een element van de duale ruimte $\mathcal{H}^* := \{\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ lineair}\}$ van $\mathcal{H}$.

De term *wortel* is gekozen omdat $r(h)$ een wortel van het karakteristieke polynoom van $\operatorname{ad} h$ is.

Met behulp van de Killing vorm kunnen elementen van $\mathcal{H}^*$ met elementen van H geïdentificeerd worden, want voor $r \in \mathcal{H}^*$ is er een eenduidige $h_r \in \mathcal{H}$ met $r(h) = \kappa(h_r, h)$ voor alle $h \in \mathcal{H}$ (hier hebeen we uiteraard nodig dat κ niet ontaard is).

Met deze correspondentie kunnen we wortels van $\mathcal{L}$ als elementen van de Cartan deelalgebra $\mathcal{H}$ opvatten, en met de Killing vorm als inproduct brengen de wortels een rooster voort.

In het kader van Lie algebra's wordt niet zo zeer naar het rooster gekeken dat door de wortels opgespannen wordt, maar naar de verzameling van wortels, het *wortelsysteem* Φ. Er laat zich aantonen dat er steeds een deelverzameling $\Delta \subseteq \Phi$ bestaat, zo dat iedere wortel een eenduidige niet-negatieve of niet-positieve lineaire combinatie van de elementen van Δ is. Zo'n verzameling Δ heet een *basis* of *fundamenteel systeem* van Φ. In het bijzonder is het aantal elementen in een basis gelijk aan de rang van $\mathcal{L}$.

We bekijken drie eenvoudige voorbeelden.

Voorbeeld 1: Zij
$$\mathcal{L} := sl_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C},\ a + d = 0 \right\}.$$
Een basis van $\mathcal{L}$ is
$$B = \left(x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

en $\mathcal{H} = \langle h \rangle$ is een Cartan deelalgebra.

De geadjungeerde representatie van h met betrekking tot B is

$$\operatorname{ad} h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

en voor de Killing vorm κ beperkt tot $\mathcal{H}$ geldt $\kappa(h, h) = \text{spoor}(\operatorname{ad} h \cdot \operatorname{ad} h) = 8$.

De eerste component van de diagonaal van ad h geeft de wortel α met $\alpha(h) = 2$, dus is $h_\alpha = \frac{1}{4}h$. De derde component geeft de wortel $-\alpha$.

Voorbeeld 2: Zij

$$\mathcal{L} := sl_3(\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{3\times 3} \mid \text{spoor}(X) = 0\}$$

Voor het gemak noteren we de matrix X met $X_{ij} = 1$ en 0en elders met E_{ij}. We definiëren

$$h_1 := E_{11} - E_{22}, \quad h_2 := E_{22} - E_{33},$$
$$x_1 := E_{12},\ x_2 := E_{23},\ x_3 := E_{13}, \quad y_1 := E_{21},\ y_2 := E_{32},\ y_3 := E_{31}$$

dan is $B = (x_1, x_2, x_3, h_1, h_2, y_3, y_2, y_1)$ een basis van $\mathcal{L}$ en $\mathcal{H} := \langle h_1, h_2 \rangle$ is een Cartan deelalgebra van $\mathcal{L}$.

Met betrekking tot de basis B zijn ad h_1 en ad h_2 de diagonaalmatrices

$$\operatorname{ad} h_1 = diag(2, -1, 1, 0, 0, -1, 1, -2) \text{ en } \operatorname{ad} h_2 = diag(-1, 2, 1, 0, 0, -1, -2, 1)$$

en de Killing vorm beperkt tot $\mathcal{H}$ heeft met betrekking tot de basis (h_1, h_2) van $\mathcal{H}$ de Gram matrix $\kappa = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$.

De eerste component van de diagonalen van ad h_1 en ad h_2 geeft de wortel α met $\alpha(h_1) = 2$ en $\alpha(h_2) = -1$, dus is $h_\alpha = \frac{1}{6}h_1$. De tweede component geeft de wortel β met $\beta(h_1) = -1$ en $\beta(h_2) = 2$, dus is $h_\beta = \frac{1}{6}h_2$. De derde component is juist de som van de eerste twee componenten, dus hoort hierbij de wortel $\alpha + \beta$. De laatste drie componenten zijn (in omgekeerde volgorde) juist de negatieven van de eerste drie componenten. Het wortelsysteem Φ bevat dus de wortels $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ en hun negatieven en $\Delta = (\alpha, \beta)$ is een systeem van fundamentele wortels.

Het rooster voortgebracht door de wortels is juist het hexagonale rooster.

Voorbeeld 3: Zij

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de matrix van een bilineaire afbeelding die over $\mathbb{C}$ equivalent is met de eenheidsmatrix I_5 (middels de basis transformatie $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_5), e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_4), e'_3 = e_3, e'_4 = \frac{1}{\sqrt{-2}}(e_2 - e_4), e'_5 = \frac{1}{\sqrt{-2}}(e_1 - e_5)$.

We definiëren

$$\mathcal{L} := so_5(\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{5\times 5} \mid X^{tr}F = -FX\}.$$

Als men F door I_5 vervangt, ziet men snel in dat $\mathcal{L}$ dimensie 10 heeft. De matrix F is zo gekozen dat de Cartan deelalgebra uit diagonaalmatrices bestaat.

Een basis van $\mathcal{L}$ is $B = (x_1, x_2, x_3, x_4, h_1, h_2, y_4, y_3, y_2, y_1)$ met

$$\begin{gathered} h_1 := E_{11} - E_{55}, \quad h_2 := E_{22} - E_{44}, \\ x_1 := E_{12} - E_{45},\ x_2 := E_{23} - E_{34},\ x_3 := E_{13} - E_{35},\ x_4 := E_{14} - E_{25}, \\ y_1 := E_{21} - E_{54},\ y_2 := E_{32} - E_{43},\ y_3 := E_{31} - E_{53},\ y_4 := E_{41} - E_{52}. \end{gathered}$$

Met betrekking tot de basis B zijn $\operatorname{ad} h_1$ en $\operatorname{ad} h_2$ de diagonaalmatrices

$$\begin{aligned} \operatorname{ad} h_1 &= diag(1,0,1,1,0,0,-1,-1,0,-1) \quad \text{en} \\ \operatorname{ad} h_2 &= diag(-1,1,0,1,0,0,-1,0,-1,1) \end{aligned}$$

en de Killing vorm beperkt tot $\mathcal{H}$ heeft met betrekking tot de basis (h_1, h_2) van $\mathcal{H}$ de Gram matrix $\kappa = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

De eerste component van de diagonalen van $\operatorname{ad} h_1$ en $\operatorname{ad} h_2$ geeft de wortel α met $\alpha(h_1) = 1$ en $\alpha(h_2) = -1$, dus is $h_\alpha = \frac{1}{6}(h_1 - h_2)$. De tweede component geeft de wortel β met $\beta(h_1) = 0$ en $\beta(h_2) = 1$, dus is $h_\beta = \frac{1}{6}h_2$. De derde component is juist de som van de eerste twee componenten, dus hoort hierbij de wortel $\alpha + \beta$ en de vierde component geeft de wortel $\alpha + 2\beta$. De laatste vier componenten zijn (weer in omgekeerde volgorde) de negatieven van de eerste vier componenten. Het wortelsysteem Φ bevat dus de wortels $\alpha, \beta, \alpha+\beta, \alpha+2\beta$ en hun negatieven en $\Delta = (\alpha, \beta)$ is een systeem van fundamentele wortels.

Het rooster voortgebracht door de wortels is (tot op een schaling na) het standaardrooster $\mathbb{Z}^2$.

2.4.2 De klassieke Lie algebra's

We geven nu kort de classificatie van simpele Lie algebra's over $\mathbb{C}$ aan. Er zijn vier oneindige families van simpele Lie algebra's en vijf aparte Lie algebra's die exceptionele Lie algebra's heten. De *type* van een Lie algebra $\mathcal{L}$ wordt aangegevn met $\mathbf{X}_n$, waarbij X voor de familie en n voor de rang van $\mathcal{L}$ staat.

$\mathbf{A_n}$

De Lie algebra $\mathcal{L} := sl_{n+1}(\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)} \mid \operatorname{spoor}(X) = 0\}$ heet van type A_n.

De dimensie van $\mathcal{L}$ is $(n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$, de rang is n en de diagonaalmatrices van spoor 0 vormen een Cartan deelalgebra. Als we met e_i de diagonaalmatrix met 1 in de i-de component en 0 elders noteren, zijn tot op een schaling na de wortels gegeven door $e_i - e_j$ met $i \neq j$. Een fundamenteel systeem van wortels is $(e_1 - e_2, \ldots, e_n - e_{n+1})$.

Het rooster voortgebracht door de wortels is het rooster $L = \{v \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} v_i = 0\}$.

Opdracht 7 Het wortelrooster A_n is gedefinieerd als het deelrooster van $\mathbb{Z}^{n+1}$ dat de vectoren met coördinatensom 0 bevat, A_n ligt dus in het orthogonale complement van de vector $(1, 1, \ldots, 1)^{tr} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (dat dimensie n heeft). Er geldt dus

$$A_n := \{v \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} v_i = 0\}.$$

(i) Vind roosterbases B en B' van A_n zo dat A_n met betrekking tot deze bases de Gram matrices F en F' heeft, waarbij

$$F_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{als } i = j \\ -1 & \text{als } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{als } |i - j| \geq 2 \end{cases} \quad \text{en} \quad F'_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{als } i = j \\ 1 & \text{als } i \neq j \end{cases}$$

(ii) Bepaal een roosterbasis voor het duale rooster $A_n^{\#}$ van A_n.

(iii) Laat zien dat $A_n^{\#}/A_n \cong C_{n+1}$ is.

•

$\mathbf{B_n}$

We noteren met J_n de $n \times n$-matrix met 1en op de *dwaarsdiagonaal* en 0en elders, d.w.z. $(J_n)_{ij} = 1$ als $j = n + 1 - i$ en 0 anders.

We definiëren $F := \begin{pmatrix} & & J_n \\ & 1 & \\ J_n & & \end{pmatrix}$ waarbij alle lege plekken 0 zijn.

De Lie algebra $\mathcal{L} := so_{2n+1}(\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{(2n+1)\times(2n+1)} \mid X^{tr}F + FX = 0\}$ heet van type B_n.

De dimensie van $\mathcal{L}$ is $\binom{2n+1}{2} = 2n^2 + n$, de rang is n en de diagonaalmatrices van de vorm $h_i = E_{ii} - E_{2n+2-i,2n+2-i}$ voor $1 \leq i \leq n$ vormen de basis van een Cartan deelalgebra. Als we voor $1 \leq i \leq n$ met e_i de diagonaalmatrix $e_i := E_{ii} - E_{2n+2-i,2n+2-i}$ noteren, zijn (tot op een schaling na) de wortels gegeven door $\pm e_i \pm e_j$ met $i \neq j$ en $\pm e_i$. Een fundamenteel systeem van wortels is $(e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n, e_n)$.

Het rooster voortgebracht door de wortels is het standaardrooster Z^n.

$\mathbf{C_n}$

We definiëren $F := \begin{pmatrix} & J_n \\ -J_n & \end{pmatrix}$ waarbij alle lege plekken 0 zijn. Voor de matrix F geldt $F^{tr} = -F$, we noemen F dan ook scheefsymmetrisch.

De Lie algebra $\mathcal{L} := sp_{2n}(\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{(2n)\times(2n)} \mid X^{tr}F + FX = 0\}$ heet van type C_n.

De dimensie van $\mathcal{L}$ is $\binom{2n+1}{2} = 2n^2 + n$, de rang is n en de diagonaalmatrices van de vorm $h_i = E_{ii} - E_{2n+1-i,2n+1-i}$ voor $1 \leq i \leq n$ vormen de basis van een Cartan deelalgebra. Als we voor $1 \leq i \leq n$ met e_i de diagonaalmatrix $e_i := E_{ii} - E_{2n+1-i,2n+1-i}$ noteren, zijn (tot op een schaling na) de wortels gegeven door $\pm e_i \pm e_j$ met $i \neq j$ en $\pm 2e_i$. Een fundamenteel systeem van wortels is $(e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n, 2e_n)$.

Het rooster voortgebracht door de wortels is het rooster $L = \{v \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n v_i \equiv 0 \bmod 2\}$.

$\mathbf{D_n}$

We definiëren $F := \begin{pmatrix} & J_n \\ J_n & \end{pmatrix}$ waarbij alle lege plekken 0 zijn.

De Lie algebra $\mathcal{L} := so_{2n}(\mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{(2n)\times(2n)} \mid X^{tr}F + FX = 0\}$ heet van type D_n.

De dimensie van $\mathcal{L}$ is $\binom{2n}{2} = 2n^2 - n$, de rang is n en de diagonaalmatrices van de vorm $h_i = E_{ii} - E_{2n+1-i,2n+1-i}$ voor $1 \leq i \leq n$ vormen de basis van een Cartan deelalgebra. Als we voor $1 \leq i \leq n$ met e_i de diagonaalmatrix $e_i := E_{ii} - E_{2n+1-i,2n+1-i}$ noteren, zijn (tot op een schaling na) de wortels gegeven door $\pm e_i \pm e_j$ met $i \neq j$. Een fundamenteel systeem van wortels is $(e_1 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n)$.

Het rooster voortgebracht door de wortels is net als bij type C_n het rooster $L = \{v \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n v_i \equiv 0 \bmod 2\}$.

Opdracht 8 Het wortelrooster D_n is gedefinieerd als het deelrooster van $\mathbb{Z}^n$ dat de vectoren met even coördinatensom bevat. Er geldt dus

$$D_n := \{v \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n v_i \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Om voor de hand liggende redenen wordt D_n vaak het *checkerboard* rooster genoemd.

(i) Geef een roosterbasis van D_n aan.

(ii) Bepaal een roosterbasis voor het duale rooster $D_n^{\#}$ van D_n.

(iii) Laat zien dat $D_n^{\#}/D_n \cong V_4$ als n even en dat $D_n^{\#}/D_n \cong C_4$ als n oneven.

•

Opdracht 9 Laat zien dat de roosters A_3 en D_3 equivalent zijn. Vind hiervoor bases voor de twee roosters zo dat de Gram matrices met betrekking tot deze bases hetzelfde zijn. •

Opdracht 10 Zij $D_n := \{v \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n v_i \in 2\mathbb{Z}\}$ het wortelrooster van type `D` en dimensie n en zij $v_0 := (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})^{tr} \in \mathbb{R}^n$ de vector met alle componenten gelijk aan $\frac{1}{2}$. We definiëren

$$D_n^+ := D_n \cup (v_0 + D_n) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \in D_n \text{ of } v - v_0 \in D_n\}.$$

(i) Laat zien dat D_n^+ dan en slechts dan een rooster is als n even is.

(ii) Laat zien dat D_n^+ een even rooster is als $8 \mid n$.

(iii) Bewijs dat D_4^+ equivalent met het standaardrooster $\mathbb{Z}^4$ is.

(iv) Bepaal de minimale vectoren van D_8^+ (het raak getal is 240).

•

2.4.3 Exceptionele Lie algebra's

$\mathbf{E_6}, \mathbf{E_7}, \mathbf{E8}$

Zij $(e_1, \ldots, e_8)$ de standaardbasis van $\mathbb{Z}^8$, dan is $\Phi = (\pm e_i \pm e_j, i \neq j, \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm \ldots \pm e_8)$ met een even aantal $-$) een wortelsysteem van een Lie algebra van dimensie 248 en rang 8 die de type E_8 heeft. Een systeem van fundamentele wortels is $\Delta = (e_1 - e_2, \ldots, e_6 - e_7, e_6 + e_7, -\frac{1}{2}(e_1 + \ldots + e_8)$.

Het rooster voortgebracht door dit wortelsysteem is het eenduidige even zelfduale rooster van dimensie 8.

Als men de vector $e_1 - e_2$ uit het fundamentele systeem Δ van E_8 verwijdert en een nieuw fundamenteel systeem definieert door $\Delta' = \Delta \backslash \{e_1 - e_2\}$, dan vormt de deelverzameling $\Phi' \subseteq \Phi$ van wortels die lineaire combinaties van de vectoren in Δ' zijn een wortelsysteem dat 126 vectoren bevat. Dit wortelsysteem hoort bij een Lie algebra van dimensie 133 en rang 7 die de type E_7 heeft.

Het rooster voortgebracht door het wortelsysteem Δ' is een even 7-dimensionaal rooster met discriminant 2.

Als men nu ook de vector $e_2 - e_3$ uit het fundamentele systeem Δ' van E_7 verwijdert en een nieuw fundamenteel systeem definieert door $\Delta'' = \Delta' \setminus \{e_1 - e_2\} = \Delta \setminus \{e_1 - e_2, e_2 - e_3\}$, dan vormt de deelverzameling $\Phi'' \subseteq \Phi$ van wortels die lineaire combinaties van de vectoren in Δ'' zijn een wortelsysteem dat 72 vectoren bevat. Dit wortelsysteem hoort bij een Lie algebra van dimensie 78 en rang 6 die de type E_6 heeft.

Het rooster voortgebracht door het wortelsysteem Δ'' is een even 6-dimensionaal rooster met discriminant 3.

Opdracht 11 Het wortelrooster (of Gosset rooster) E_8 is gegeven door

$$E_8 = D_8^+ := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{8} v_i \in 2\mathbb{Z}, \text{ alle } v_i \in \mathbb{Z} \text{ of alle } v_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}\}.$$

(i) Bepaal een roosterbasis van E_8, de Gram matrix F van E_8 met betrekking tot deze basis en toon aan dat E_8 zelfdual is, dus dat $\det(F) = 1$ is (de determinant mag je met Magma bepalen).

(ii) Vergelijk de Hermite invariante $\gamma_8(E_8)$ met de Hermite invarianten van A_8 en D_8.

•

Opdracht 12 Zij x een minimale vector van E_8, dan is

$$E_7 := \{v \in E_8 \mid v \cdot x = 0\}$$

een 7-dimensionaal deelrooster van E_8. Als $x = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})^{tr}$ gekozen wordt, is

$$E_7 = \{v \in E_8 \mid \sum_{i=1}^{8} v_i = 0\}.$$

(i) Bepaal een roosterbasis van E_7, de Gram matrix F van E_7 met betrekking tot deze basis en toon aan dat $E_7^{\#}/E_7 \cong C_2$.

(ii) Laat zien dat E_7 126 minimale vectoren heeft. Gebruik hiervoor je implementatie uit Opgave 12 en controleer dit met behulp van de theoretische beschrijving van de vectoren.

(iii) Vergelijk de Hermite invariante $\gamma_7(E_7)$ met de Hermite invarianten van A_7 en D_7.

•

Opdracht 13 Laten x en y minimale vectoren van E_8 zijn met $x \cdot y = 1$, d.w.z. x en y spannen een 2-dimensionaal hexagonaal rooster op. Dan is

$$E_6 := \{v \in E_8 \mid v \cdot x = v \cdot y = 0\}$$

een 6-dimensionaal deelrooster van E_8 en ook een deelrooster van E_7. Als $x = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})^{tr}$ en $y = (1, 0, \ldots, 0, 1)^{tr}$ gekozen wordt, is

$$E_6 = \{v \in E_8 \mid \sum_{i=1}^{8} v_i = v_1 + v_8 = 0\}.$$

(i) Bepaal een roosterbasis van E_6, de Gram matrix F van E_6 met betrekking tot deze basis en toon aan dat $E_6^{\#}/E_6 \cong C_3$.

(ii) Laat zien dat E_6 72 minimale vectoren heeft.

(iii) Vergelijk de Hermite invariante $\gamma_6(E_6)$ met de Hermite invarianten van A_6 en D_6.

•

$\mathbf{F_4}$

Zij (e_1, e_2, e_3, e_4) de standaardbasis van $\mathbb{Z}^4$, dan is

$$\Phi = (\pm e_i \pm e_j, i \neq j, \pm e_i, \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4))$$

een wortelsysteem van een Lie algebra van dimensie 52 en rang 4 die de type F_4 heeft. Een systeem van fundamentele wortels is $\Delta = (e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_3, \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4)$.

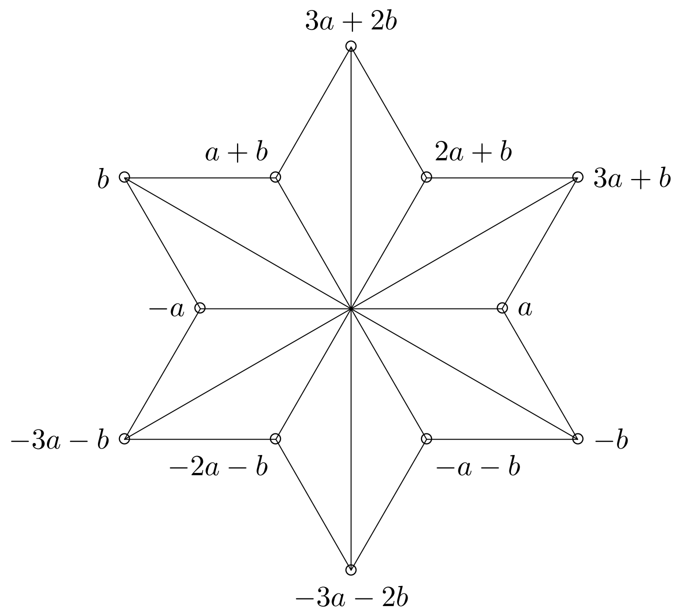
Het rooster voortgebracht door Φ is equivalent met het rooster voortgebracht door de type D_4. Dit ziet men als volgt in: Als men de Gram matrix met betrekking tot het fundamentele systeem van F_4 met 2 vermenigvuldigt, krijgt men $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Een stelsel vectoren in het wortelsysteem van type D_4 dat dezelfde Gram matrix oplevert is $(-e_1-e_2-e_3+e_4, 2e_3, e_2-e_3, e_1-e_2)$ en men gaat eenvoudig na dat dit een roosterbasis van het rooster voortgebracht door het wortelsysteem van type D_4 is.

$\mathbf{G_2}$

Zij (α, β) een fundamenteel systeem van het wortelsysteem van een Lie algebra van type A_2. Zij nu $a := \alpha$ en $b := \beta - \alpha$, dan is $\Phi := \{\pm a, \pm b, \pm(a+b), \pm(2a+b), \pm(3a+b), \pm(3a+2b)\}$ een wortelsysteem van een Lie algebra van dimensie 14 en rang 2 die de type G_2 heeft. Een systeem van fundamentele wortels is $\Delta = (a, b)$. Dit is een deelalgebra van de Lie algebra so_7 van type B_3.

Het rooster voortgebracht door Φ is hetzelfde als bij de type A_2.

Het volgende plaatje laat het wortelsysteem van type G_2 zien.



Merk op dat de korte en de lange vectoren apart telkens een wortelsysteem van type A_2 vormen.