Opgaven 1

Opgave 1.
Met betrekking tot geschikte roosterbases hebben het rechthoekrooster L_R en het ruitrooster L_D de symmetriegroepen

$$Aut(L_R) = \langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{en} \quad Aut(L_D) = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Laat zien dat er geen basistransformatie $T \in GL_2(\mathbb{Z})$ van de basis van L_R bestaat zo dat de symmetriegroep met betrekking tot deze nieuwe basis gelijk is aan $Aut(L_D)$.

Opgave 2.
Bepaal voor ieder van de vijf volledige symmetriegroepen $Aut(L)$ van de verschillende typen van roosters in $\mathbb{R}^2$ (dus $L \in \{L_V, L_H, L_R, L_D, L_P\}$) de ondergroepen $H \lneqq Aut(L)$ met $\mathcal{F}(H) = \mathcal{F}(Aut(L))$. Dit zijn juist de eindige ondergroepen van de orthogonale groep die geen volledige symmetriegroepen van een rooster zijn.

Opgave 3.
Voor een vol rooster $L \subseteq \mathbb{R}^n$ heet een stelsel $(v_1, \ldots, v_n)$ van vectoren een *minimaalsysteem* als voor iedere i geldt dat $v_i \in L$ een vector van minimale lengte is die lineair onafhankelijk van $(v_1, \ldots, v_{i-1})$ is (in het bijzonder is dus v_1 een vector van minimale lengte).

(i) Bewijs dat voor een 2-dimensionaal rooster een minimaalsysteem altijd een roosterbasis is. (Hint: Laat zien en pas toe dat $|v_1 \cdot v_2| \leq \frac{1}{2}\|v_1\|^2$.)

(ii) Zij L een 2-dimensionaal rooster dat zo gedraaid en geschaald is dat $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ een vector van minimale lengte in L is.

  (a) Laat zien dat (na mogelijke spiegelingen van L in de x- en y-as) een vector $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ met $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ en $y > 0$ (en natuurlijk $x^2 + y^2 \geq 1$) gekozen kan worden zo dat (v_1, v_2) een minimaalsysteem van L is.

  (b) Beschrijf voor de verschillende typen van 2-dimensionale roosters de mogelijke posities van de vector v_2 zo als die volgens (a) bestaat.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/kristgroep_05