Opgaven 10

Opgave 37.
Zij R een ruimtegroep met puntgroep G en vector systeem $\{t_g \mid g \in G\}$. Het is duidelijk dat het vector systeem (modulo $\mathbb{Z}^n$) vast ligt door de elementen t_{g_i} voor voortbrengers g_i van G.
Laat zien dat door een geschikte keuze van de oorsprong (dus modulo inwendige derivaties) het vector systeem zo aangepast kan worden dat $t_{g_i} = 0$ voor één van de voortbrengers g_i die geen vaste vectoren heeft, dus voor een voortbrenger met $g_i v \neq v$ voor alle $v \neq 0$.

Opgave 38.
Zij $G_1 := \left\langle g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq GL_3(\mathbb{Z})$, dan is $G_1 \cong C_6$ en g^6 is een definiërende relatie voor G_1.
Geef de ruimtegroepen R met puntgroep G_1 en translatierooster $\mathbb{Z}^3$ aan, door de verschillende vector systemen (gegeven door de vector t_g) tot op inwendige derivaties na te bepalen, d.w.z. tot op verschuivingen van de oorsprong.
Probeer de gevonden groepen meetkundig te beschrijven.

Een iets grotere groep die net zo als G_1 op het 3-dimensionale hexagonale rooster werkt is $G_2 := \left\langle g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq GL_3(\mathbb{Z})$. Er geldt $G_2 \cong C_6 \times C_2$ en definiërende relaties voor G_2 zijn $g^6, h^2, hghg^{-1}$.
Wat zijn in dit geval de vector systemen van ruimtegroepen met puntgroep G_2 en translatierooster $\mathbb{Z}^3$?

Opgave 39.
Zij G de groep van diagonaalmatrices in $GL_3(\mathbb{Z})$, dus

$$G := \left\langle g_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong C_2^3.$$

De groep G is de volle symmetriegroep van een 3-dimensionaal rooster met orthogonale maar verschillende lange basis vectoren (het *monokliene* rooster). Definiërende relaties voor G zijn g_1^2, g_2^2, g_3^2, $g_1g_2g_1g_2$, $g_1g_3g_1g_3$, $g_2g_3g_2g_3$.

(i) Bepaal de orde van de cohomologiegroep $H^1(G, \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3)$, dus het aantal verschillende vector systemen tot op inwendige derivaties na.

(ii) Probeer het resultaat uit (i) te veralgemenen op de groep G van diagonaalmatrices in $GL_n(\mathbb{Z})$. Deze groep is voortgebracht door de matrices $g_1, \ldots, g_n$, waarbij g_i en -1 in de i-de component van de diagonaal heeft en 1 elders. Er geldt $G \cong C_2^n$ en definiërende relaties zijn g_i^2 voor $1 \leq i \leq n$ en $g_ig_jg_ig_j$ voor $1 \leq i < j \leq n$.

Opgave 40.

De alternerende groep $A_5 := \langle a = (1,2)(3,4),\ \ b = (1,3,5)\rangle$ heeft de definiërende relaties $a^2, b^3, (ab)^5$. Door uitdelen naar de vaste vector van de 5-dimensionale permutatie representatie krijgt men de volgende 4-dimensionale voorstelling van A_5 over $\mathbb{Z}$:

$$G := \left\langle g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cong A_5.$$

Bepaal de vector systemen van ruimtegroepen met puntgroep G en translatierooster $\mathbb{Z}^4$ tot op inwendige derivaties na.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/kristgroep_05