Opgaven 2

Opgave 4.

Zij $L := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ het rooster voortgebracht door vectoren naar drie hoekpunten van een kubus.
Bepaal de Gram matrix van F (met betrekking tot de aangegeven basis), geef een roosterbasis en de Gram matrix van het duale rooster $L^{\#}$ aan en vind compatibele bases voor $L^{\#}$ en L.

Opgave 5.

Het wortelrooster A_n is gedefinieerd als het deelrooster van $\mathbb{Z}^{n+1}$ dat de vectoren met coördinatensom 0 bevat, A_n ligt dus in het orthogonale complement van de vector $(1, 1, \ldots, 1)^{tr} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (dat dimensie n heeft). Er geldt dus

$$A_n := \{v \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} v_i = 0\}.$$

(i) Vind roosterbases B en B' van A_n zo dat A_n met betrekking tot deze bases de Gram matrices F en F' heeft, waarbij

$$F_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{als } i = j \\ -1 & \text{als } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{als } |i-j| \geq 2 \end{cases} \quad \text{en} \quad F'_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{als } i = j \\ 1 & \text{als } i \neq j \end{cases}$$

(ii) Bepaal een roosterbasis voor het duale rooster $A_n^{\#}$ van A_n.

(iii) Laat zien dat $A_n^{\#}/A_n \cong C_{n+1}$ is.

Opgave 6.

Het wortelrooster D_n is gedefinieerd als het deelrooster van $\mathbb{Z}^n$ dat de vectoren met even coördinatensom bevat. Er geldt dus

$$D_n := \{v \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^{n} v_i \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Om voor de hand liggende redenen wordt D_n vaak het *checkerboard* rooster genoemd.

(i) Geef een roosterbasis van D_n aan.

(ii) Bepaal een roosterbasis voor het duale rooster $D_n^{\#}$ van D_n.

(iii) Laat zien dat $D_n^{\#}/D_n \cong V_4$ als n even en dat $D_n^{\#}/D_n \cong C_4$ als n oneven.

Opgave 7.
Laat zien dat de roosters A_3 en D_3 equivalent zijn. Vind hiervoor bases voor de twee roosters zo dat de Gram matrices met betrekking tot deze bases hetzelfde zijn.

Puzzel (Uitdaging)
We weten dat voor twee roosters $L_1, L_2 \leq \mathbb{R}^n$ met $L_2 \leq L_1$ steeds compatibele bases bestaan. Hoe zit het met drie roosters $L_3 \leq L_2 \leq L_1$?
Laat zich steeds een roosterbasis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ van L_1 vinden zo dat L_2 een roosterbasis $B' = (c_1 b_1, \ldots, c_n b_n)$ heeft met $c_i \mid c_{i+1}$ en L_3 een roosterbasis $B'' = (d_1 b_1, \ldots, d_n b_n)$ met $d_i \mid d_{i+1}$ en $c_i \mid d_i$?
Ga na dat dit in het geval $D_3 \leq \mathbb{Z}^3 \leq D_3^{\#}$ inderdaad lukt.
Kan je een tegenvoorbeeld vinden waar het niet lukt (of een bewijs dat compatibele bases voor drie roosters inderdaad altijd bestaan)?

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/kristgroep_05