Opgaven 3

Opgave 8.
Zij $L \leq \mathbb{R}^n$ een vol rooster en zij $L^\#$ het duale rooster van L.

(i) Laat zien dat $Aut(L) = Aut(L^\#)$.

(ii) Zij F de Gram matrix van L met betrekking tot de roosterbasis B van L en zij B^* de duale basis van B. Laat zien dat F^{-1} de Gram matrix van $L^\#$ m.b.t. B^* is.

(iii) Zij $G = \{g \in GL_n(\mathbb{Z}) \mid g^{tr} F g = F\}$ de automorfisme groep $Aut(L)$ van L, geschreven m.b.t. de basis B. Ga na dat voor $Aut(L^\#)$ geschreven m.b.t. de duale basis B^* geldt dat $Aut(L^\#) = \{g^{tr} \mid g \in G\}$.

Opgave 9.
Zij $D_n := \{v \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n v_i \in 2\mathbb{Z}\}$ het wortelrooster van type D en dimensie n en zij $v_0 := (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})^{tr} \in \mathbb{R}^n$ de vector met alle componenten gelijk aan $\frac{1}{2}$. We definiëren

$$D_n^+ := D_n \cup (v_0 + D_n) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \in D_n \text{ of } v - v_0 \in D_n\}.$$

(i) Laat zien dat D_n^+ dan en slechts dan een rooster is als n even is.

(ii) Laat zien dat D_n^+ een even rooster is als $8 \mid n$.

(iii) Bewijs dat D_4^+ equivalent met het standaardrooster $\mathbb{Z}^4$ is.

(iv) Bepaal de minimale vectoren van D_8^+ (het raak getal is 240).

Opgave 10.
De schaling van het standaardrooster $\mathbb{Z}^n$ met $\sqrt{2}$ heet het wortelrooster B_n van type B en dimensie n. De meest geschikte roosterbasis hiervoor bestaat uit de geschaalde vectoren $b_i := \sqrt{2}\, e_i$ van de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$.

(i) Bepaal de minimale vectoren van B_n.

(ii) De symmetrische groep S_n werkt op de vectoren van $\mathbb{R}^n$ door permutatie van de componenten. Laat zien dat deze werking automorfismen van B_n induceert en concludeer dat $Aut(B_n)$ een ondergroep isomorf met S_n heeft.

(iii) Ga na dat de minimale vectoren onder deze werking van S_n in twee banen liggen, dus dat S_n *niet transitief* op de minimale vectoren werkt.

(iv) Vind een element $g \in Aut(B_n)$ dat b_1 op $-b_1$ afbeeldt.

(v) Laat zien dat $Aut(B_n)$ een normaaldeler heeft, die een elementair abelse groep van orde 2^n is, dus van de vorm $C_2^n = \underbrace{C_2 \times C_2 \times \ldots \times C_2}_{n}$.

(vi) Bewijs dat $Aut(B_n)$ isomorf met het semidirecte product $C_2^n \rtimes S_n$ is.

Opgave 11.
Zij $A_n := \{v \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} v_i = 0\}$ het wortelrooster van type A en dimensie n.

(i) Bepaal de minimale vectoren van A_n.

(ii) De symmetrische groep S_{n+1} werkt op de vectoren van $\mathbb{R}^{n+1}$ door permutatie van de componenten. Laat zien dat deze werking automorfismen van A_n induceert en concludeer dat $Aut(A_n)$ een ondergroep isomorf met S_{n+1} heeft.

(iii) Ga na dat de minimale vectoren onder deze werking van S_{n+1} in een baan liggen, dus dat S_{n+1} *transitief* op de minimale vectoren werkt.

(iv) Bewijs dat $Aut(A_n) \cong C_2 \times S_{n+1}$ voor $n \geq 2$, waarbij de C_2 door de *centrale inversie* $-\mathbb{I}$ voortgebracht is.

Hint: Uit (ii) volgt dat $Aut(A_n)$ een ondergroep isomorf met $C_2 \times S_{n+1}$ heeft. Er moet dus aangetoond worden dat dit al de volledige automorfisme groep is. Uit (i) en (iii) volgt de lengte van de baan van de eerste basisvector, bijvoorbeeld $e_1 - e_2$. Pas nu de baanstelling toe die zegt dat $|G| = |x^G| \cdot |G_x|$, waarbij x^G de baan van x onder G is en G_x de stabilisator van x in G. Bepaal nu de lengte van de baan van de tweede basisvector (bijvoorbeeld $e_1 - e_3$) onder de stabilisator van $e_1 - e_2$ en itereer dit proces.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/kristgroep_05