Opgaven 5

Opgave 17.
Zij $L \leq \mathbb{Q}^n$ een rooster waarop een eindige groep G werkt. We weten dat L als $\mathbb{Z}G$-module niet noodzakelijk volledig reducibel is, maar dat $V = \mathbb{Q}^n$ met dezelfde werking van G wel een volledig reducibele $\mathbb{Q}G$-module is.
Laat zien dat er een deelrooster $M \leq L$ van eindige index bestaat, zo dat M een volledig reducibele $\mathbb{Z}G$-module is, d.w.z. dat $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$, waarbij de M_i irreducibele $\mathbb{Z}G$-modulen zijn.

Opgave 18.
Zij $G = \langle g \rangle \cong C_3$ en zij $\Delta : G \to GL_2(K)$ gegeven door $g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, waarbij K een van de lichamen $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{F}_p$ (voor een priemgetal p) is.
Voor welke K is Δ reducibel, volledig reducibel, irreducibel?

Opgave 19.
Zij K een lichaam en $G \leq S_n$ een permutatie groep op n punten. Zij $V = K^n$ de KG-module met basis $(v_1, \ldots, v_n)$ waarop G door permutatie van de basisvectoren werkt.

(i) Laat zien dat $V_0 := \langle \sum_{i=1}^n v_i \rangle$ en $V_1 := \langle v_1 - v_n, v_2 - v_n, \ldots, v_{n-1} - v_n \rangle$ G-invariante deelmodulen (van dimensies 1 en $n-1$) van V zijn.

(ii) Voor welke karakteristieken van K is $V = V_0 \oplus V_1$, voor welke niet?

(iii) Zij G de alternerende groep A_5 en $K = \mathbb{F}_2$. Laat zien dat de werking van A_5 op V_1 een irreducibele voorstelling van graad 4 van A_5 geeft. (Hint: A_5 is een simpele groep.)

Opgave 20.
De diëdergroep D_4 van orde 8 werkt op de hoekpunten van een vierkant en deze werking geeft een inbedding van D_4 in S_4. Zij $V = \mathbb{R}^4$ de $\mathbb{R}D_4$-module waarop D_4 door permutatie van de basisvectoren werkt.
Bepaal alle $\mathbb{R}D_4$-deelmodulen van V.

Opgave 21.
Een p-*groep* is een eindige groep G met $|G| = p^a$ voor een priemgetal p en $a \geq 1$. Zij K een lichaam met karakteristiek $\mathrm{kar}(K) = p$ en zij $\Delta : G \to GL_n(K)$ een irreducibele voorstelling van G. Laat zien dat $n = 1$ en $\Delta(g) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ voor alle $g \in G$, d.w.z. toon aan dat de triviale voorstelling de enige irreducibele voorstelling van G is. (Hint: Bekijk de banen van G op K^n en houd rekening ermee dat de lengte van een baan een deler van $|G|$ is.)

Opgave 22.
Zij G een groep en K een lichaam. Laat zien dat de 1-dimensionale voorstellingen van G in bijectie zijn met de homomorfismen $\varphi : G/G' \to K^*$.
(Herinnering: G' is de commutator ondergroep van G, voortgebracht door de elementen $[g, h] := g^{-1}h^{-1}gh$.)

Opgave 23.
Zij G een eindige groep, K een lichaam en KG de groep ring van G. Zij $\Delta : G \to K^*$ een 1-dimensionale voorstelling van G.

(i) Laat zien dat $I := \{\sum_{g\in G} a_g g \mid \sum_{g\in G} a_g\Delta(g) = 0\}$ een tweezijdig ideaal in de ring KG is.

Concludeer dat de restklassenruimte KG/I een KG-module is, waarbij G door vermenigvuldiging van links op KG werkt.

(ii) Laat zien dat de werking van G op KG/I juist de voorstelling Δ geeft.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/kristgroep_05