Opgaven 6

Opgave 24.
Zij χ het karakter van een absoluut irreducibele voorstelling van de eindige groep G over K. Zij Δ een voorstelling van graad n van G over K met karakter $a \cdot \chi$.
Laat zien dat $Int(\Delta, \Delta) = C_{K^{n\times n}}(\Delta) \cong K^{a\times a}$.

Opgave 25.
Voor een lichaamsuitbreiding $L \supseteq K$ met $\mathbb{Q} \subseteq K, L \subseteq \mathbb{C}$ vormen de lichaamsautomorfismen $\alpha \in Aut(L)$ die K puntsgewijs vast laten een groep, de *Galois groep* $Gal(L, K)$. In het algemeen geldt $|Gal(L, K)| \leq [L : K]$ maar in het geval $|Gal(L, K)| = [L : K]$ noemt men $L \supseteq K$ een *Galois uitbreiding*. Er laat zich aantonen dat in het bijzonder lichaamsuitbreidingen $L \supseteq K$ met $K, L \subseteq \mathbb{Q}(\zeta)$ voor ζ een m-de eenheidswortel steeds Galois uitbreidingen zijn. Een belangrijke eigenschap van Galois uitbreidingen is:

$$c \in L \text{ met } \alpha(c) = c \text{ voor alle } \alpha \in Gal(L, K) \Rightarrow c \in K.$$

Zij $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$ en zij χ een irreducibel karakter over K van een eindige groep G. Zij ψ een absoluut irreducibel karakter van G over $\mathbb{C}$ met $a := (\chi, \psi) > 0$. Zij $L := K(\psi)$ de lichaamsuitbreiding van K die verkregen wordt door alle waarden van het karakter ψ aan K toe te voegen.

(i) Ga na dat voor iedere $\alpha \in Gal(L, K)$ ook ψ^α gedefinieerd door $\psi^\alpha(g) := \alpha(\psi(g))$ het karakter van een absoluut irreducibele voorstelling van G is. Men noemt ψ^α een *algebraïsch geconjugeerde* karakter van ψ.

(ii) Laat zien dat $(\chi, \psi^\alpha) = (\chi, \psi) = a$ voor alle $\alpha \in Gal(L, K)$.

(iii) Bewijs dat $\chi = a \cdot \sum_{i=1}^{s} \psi^{\alpha_i}$, waarbij $\psi^{\alpha_1}, \ldots, \psi^{\alpha_s}$ precies de *verschillende* algebraïsch geconjugeerden van ψ zijn.

Opgave 26.
Zij G een eindige groep, $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$ en zij χ het karakter van een irreducibele voorstelling Δ van graad n over K. Toon aan:

(i) $|\chi(g)| \leq \chi(1) = n$ voor alle $g \in G$.

(ii) $|\chi(g)| = n \Leftrightarrow \Delta(g) = a \cdot I_n$ met $a \in K$.

(iii) $\chi(g) = n \Leftrightarrow \Delta(g) = I_n \Leftrightarrow g \in \ker(\Delta)$.

(iv) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$. Hieruit volgt in het bijzonder dat het inproduct $(\chi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi(g)\psi(g^{-1})$ op de klassenfuncties positief definiet is.

(v) Voor een priemgetal p geldt $\chi(g^p) \equiv \chi(g)^p \bmod p$.

(vi) Voor een priemgetal p en $\chi(g) \in \mathbb{Q}$ geldt $\chi(g^p) \equiv \chi(g) \bmod p$.

Bij (v) en (vi) is met $a \equiv b \bmod p$ bedoeld dat $a - b \in p\mathbb{Z}[\zeta]$ voor een primitieve m-de eenheidswortel ζ, waarbij m de orde van g is.
(Hint: Alle eigenschappen zijn invariant onder conjugatie met een basistransformatie $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Over $\mathbb{C}$ is een element van orde m diagonaliseerbaar en heeft m-de eenheidswortels op de diagonaal.)

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/kristgroep_05