Opgaven 7

Opgave 27.
We hebben gezien dat voor een eindige groep G

$$(\chi, \psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\, \psi(g^{-1})$$

een Hermitesch inproduct op de klassenfuncties van G over $\mathbb{C}$ definieert. Voor grotere groepen is het natuurlijk onhandig, de som over de hele groep te laten lopen, maar volgens de definitie zijn klassenfuncties constant op de conjugatieklassen.
Laat zien dat

$$(\chi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{r} [G : C_G(g_i)]\, \chi(g_i)\, \overline{\psi(g_i)} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{r} |C_i|\, \chi(g_i)\, \overline{\psi(g_i)}$$

waarbij $g_1, \ldots, g_r$ representanten van de conjugatieklassen van G zijn en $C_G(g_i) := \{h \in G \mid hg_i = g_i h\}$ de *centralisator* van g_i in G. Met C_i wordt de conjugatieklasse g_i^G van g_i aangegeven.
(Voor het gemak worden in de karaktertabel van een groep de ordes $|C_G(g_i)|$ van de centralisatoren of de lengtes $|C_i|$ van de conjugatieklassen vaak mee aangegeven.)

Opgave 28.
De symmetrische groep S_n werkt natuurlijk niet alleen maar op de punten $\{1, \ldots, n\}$, maar ook bijvoorbeeld op de verzameling van paren $\{\{i, j\} \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$. De permutatie voorstelling voor de werking op de paren heeft graad $\binom{n}{2}$ en geeft dus een karakter χ met $\chi(1) = \frac{n(n-1)}{2}$.
Bepaal voor $n = 3, 4, 5, 6$ het inproduct (χ, χ) van χ met zich zelf. Probeer χ in absoluut irreducibele karakters te ontbinden (door bijvoorbeeld de inproducten met bekende karakters te bepalen).

Opgave 29.
De quaternionengroep Q_8 is voortgebracht door de elementen i en j en bevat de elementen $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, waarbij $ij = k$ en $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. De karaktertabel van Q_8 ziet er als volgt uit:

$C_G(g_i)$	8	8	4	4	4
$\|C_i\|$	1	1	2	2	2
g_i	1	-1	i	j	k
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

We bekijken de volgende 4-dimensionale rationale voorstelling van Q_8:

$$\Delta : i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Laat zien dat Δ het karakter $\chi = 2 \cdot \chi_5$ heeft.

(ii) Bepaal de centralisator $C := C_{\mathbb{Q}^{4\times 4}}(\Delta)$ en laat zien dat de centralisator C een scheeflichaam is.

(Hint: Laat bijvoorbeeld zien dat een algemeen element van de centralisator alleen maar determinant 0 kan hebben, als het het nulelement is.)

Opgave 30.
De diëdergroep D_8 van orde 16 wordt voortgebracht door een rotatie ρ van orde 8 en een spiegeling τ. De karaktertabel van D_8 ziet er als volgt uit:

$C_G(g_i)$	16	16	8	8	8	4	4
$\lvert C_i\rvert$	1	1	2	2	2	4	4
g_i	1	ρ^4	ρ^2	ρ	ρ^3	τ	$\rho\tau$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	1	-1	-1	1	-1
χ_4	1	1	1	-1	-1	-1	1
χ_5	2	2	-2	0	0	0	0
χ_6	2	-2	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0
χ_7	2	-2	0	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	0

De absoluut irreducibele voorstellingen met karakters χ_6, χ_5 en χ_7 worden verkregen door

$$\rho \mapsto \begin{pmatrix} \zeta^i & 0 \\ 0 & \zeta^{-i} \end{pmatrix}, \qquad \tau \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

voor $i = 1, 2, 3$, waarbij $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{8}}$ een primitieve achtste eenheidswortel is.
We bekijken de volgende 4-dimensionale rationale voorstelling van D_8:

$$\Delta : \rho \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Laat zien dat Δ het karakter $\chi = \chi_6 + \chi_7$ heeft.

(ii) Bepaal met behulp van de idempotenten voor χ_6 en χ_7 over $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ de deelmodulen van K^4 waarop D_8 met karakters χ_6 en χ_7 werkt.

(iii) Bepaal de centralisator $C := C_{\mathbb{Q}^{4\times 4}}(\Delta)$ en laat zien dat deze isomorf met $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ is.

(Hint: Het is voldoende aan te tonen dat $\dim_{\mathbb{Q}}(C) = 2$ en dat C een element met minimumveelterm $X^2 - 2$ bevat.)

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/kristgroep_05