Opgaven 8

Opgave 31.
Zij $G \leq GL_n(\mathbb{Z})$ eindig en zij $\Delta : g \mapsto g$ de natuurlijke voorstelling van G. Met $\mathcal{F}(G) := \{F \in \mathbb{Q}^{n \times n} \mid F = F^{tr}, g^{tr} F g = F$ voor alle $g \in G\}$ noteren we de ruimte van invariante vormen van G.

(i) Laat zien dat $F \in \mathcal{F}(G) \Leftrightarrow F = F^{tr}$ en $F \in Int(\Delta, \Delta^{-tr})$ (waarbij we met Δ^{-tr} de voorstelling $g \mapsto (g^{tr})^{-1}$ noteren).

(ii) Laat zien dat $\dim(\mathcal{F}(G)) = 1$ als Δ een absoluut irreducibele voorstelling is.

(iii) Stel dat $\Delta \sim_{\mathbb{Q}} \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix}$, laten χ_1 en χ_2 de karakters van Δ_1 en Δ_2 zijn en veronderstel dat $(\chi_1, \chi_2) = 0$, d.w.z. Δ_1 en Δ_2 hebben over $\mathbb{C}$ geen gemeenschappelijke constituenten. Laat zien dat in dit geval

$$\dim(\mathcal{F}(G)) = \dim(\mathcal{F}(\Delta_1(G))) + \dim(\mathcal{F}(\Delta_2(G))).$$

(iv) Stel dat $\Delta \sim_{\mathbb{Q}} \begin{pmatrix} \Gamma & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Gamma \end{pmatrix}$, d.w.z. Δ is equivalent met de d-voudige herhaling van een voorstelling Γ van G. Laat zien dat in deze situatie

$$\dim(\mathcal{F}(G)) = d \cdot \dim(\mathcal{F}(\Gamma(G))) + \frac{d^2 - d}{2} \cdot \dim(Int(\Gamma, \Gamma^{-tr})).$$

Merk op: Met iets meer theorie over voorstellingen laat zich een expliciete formule voor de dimensie $\dim(\mathcal{F}(G))$ bewijzen. Hiervoor hebben we een beetje notatie nodig: Zij χ het karakter van Δ en zij

$$\chi = \sum_{i=1}^{r} a_i \chi_i + \sum_{j=1}^{s} b_j \psi_j + \sum_{k=1}^{u} c_k (\theta_k + \overline{\theta_k}), \; a_i, b_j, c_k \in \mathbb{N}$$

de opsplitsing van χ in absoluut irreducibele karakters van G over $\mathbb{C}$. Hierbij hebben de karakters χ_i, ψ_j, θ_k de volgende eigenschappen: De χ_i hebben reële waarden en de bijhorende voorstellingen kunnen over $\mathbb{R}$ geschreven worden, de ψ_j hebben reële waarden maar de bijhorende voorstellingen kunnen niet over $\mathbb{R}$ geschreven worden (de b_j zijn daarom minstens 2), de θ_k hebben niet-reële waarden (deze komen in een rationale voorstellingen noodzakelijk in paren van complex geconjugeerden voor).
Dan geldt:

$$\dim(\mathcal{F}(G)) = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i^2 + a_i}{2} + \sum_{j=1}^{s} \frac{b_j^2 - b_j}{2} + \sum_{k=1}^{u} c_k^2.$$

Opgave 32.
We weten dat de quaternionengroep $Q_8 = \langle i, j \rangle$ slechts één niet-lineaire irreducibele voorstelling over $\mathbb{Q}$ heeft, namelijk

$$\Delta : i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Voor de centralisator $C := C_{\mathbb{Q}^{4\times 4}}(\Delta)$ geldt dat

$$C = \left\{ q_{a,b,c,d} := \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Door bijvoorbeeld na te gaan dat $\det(q_{a,b,c,d}) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, volgt dat C een scheeflichaam is en Δ dus inderdaad irreducibel is.
Zij $L_1 := \mathbb{Z}^4$ het standaardrooster waarop Q_8 met de voorstelling Δ werkt.

(i) Laat zien dat er een eenduidig maximaal deelroosters L_2 van L_1 bestaat dat invariant onder de werking van $\Delta(Q_8)$ is. Bewijs dat L_2 niet in de baan van L_1 onder de centralisator C ligt.

(ii) Transformeer Δ op een geheeltallige voorstelling Δ' van Q_8 op L_2.

(iii) Bepaal de maximale deelroosters van L_2 die invariant onder de werking van $\Delta'(Q_8)$ zijn. Laat zien dat alle gevonden deelroosters in de baan van L_1 onder de centralisator C liggen.

(iv) Bewijs dat $\Delta(Q_8)$ en $\Delta'(Q_8)$ representanten voor de niet $\mathbb{Z}$-equivalente eindige ondergroepen van $GL_4(\mathbb{Z})$ zijn die $\mathbb{Q}$-equivalent met $\Delta(Q_8)$ zijn.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/kristgroep_05