Opgaven 9

Opgave 33.
We onderzoeken de Euclidische groep $E_2(\mathbb{R})$.

(i) Laat zien dat de elementen van $E_2(\mathbb{R})$ in de volgende vier klassen vallen:

- translaties;
- rotaties;
- spiegelingen;
- glijspiegelingen.

Ga hiervoor na dat een orthogonale afbeelding in het vlak of een rotatie of een spiegeling is en dat er geen 'glijrotaties' zijn (dus dat de combinatie van een rotatie en een translatie een zuivere rotatie is).

(ii) Geef voor de verschillende combinaties van twee klassen aan in welke klasse het product van elementen van die twee klassen valt (let op dat dit niet altijd eenduidig is).

Opgave 34.
Zij R een *subperiodieke groep*, d.w.z. een ondergroep van $E_n(\mathbb{R})$ zo dat de translaties in de translatieondergroep $T(R)$ een rooster van rang $k < n$ vormen en waarvoor de puntgroep $P(R) = R/T(R)$ eindig is. Laat zien dat zich R met betrekking tot een geschikte basis laat schrijven als

$$R = \left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} g & 0 & t_g + t \\ \hline 0 & h & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid g \in GL_k(\mathbb{Z}), h \in GL_{n-k}(\mathbb{Z}), t \in \mathbb{Z}^k, t_g \in \mathbb{R}^k \right\}$$

waarbij de $g \in GL_k(\mathbb{Z})$ en de $h \in GL_{n-k}(\mathbb{Z})$ telkens in een eindige groep liggen en de vectoren $\{t_g \mid g \in G\}$ een vector systeem vormen.

Opgave 35.
Bepaal de verschillende *friesgroepen*, d.w.z. de subperiodieke groepen in $E_2(\mathbb{R})$ met een translatierooster van rang 1. Geef voor iedere groep een patroon in het vlak aan, dat deze groep als symmetriegroep heeft.
(Hint: Het aantal groepen is een priemgetal.)

Opgave 36.
Zij $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ een geheeltallige matrix. Bedenk een manier hoe je de vectoren $x \in \mathbb{Q}^n$ met $A \cdot x \in \mathbb{Z}^m$ kunt vinden. Als men A als lineaire afbeelding van $\mathbb{Q}^n/\mathbb{Z}^n$ naar $\mathbb{Q}^m/\mathbb{Z}^m$ opvat, is dit juist de kern van de afbeelding.
(Hint: Denk bijvoorbeeld aan de Smith normaal vorm.)

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/kristgroep_05