Tentamen Lineaire Algebra 1 (kans B)

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan,

Opgave 1. (12 punten)
We bekijken het volgende stelsel lineaire vergelijkingen, dat een parameter $a \in \mathbb{R}$ bevat:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 1 \\ y + az &= 1 \\ -x + y + az &= a. \end{aligned}$$

(i) Bepaal voor de parameterwaarde $a = 2$ de oplossingen van het stelsel.

(ii) Bepaal de waarden van de parameter a waarvoor het stelsel niet oplosbaar is.

(iii) Is er ook een waarde van a zo dat het stelsel oneindig veel oplossingen heeft? Zo ja, bepaal zo'n waarde, zo niet, geef een reden.

(iv) Is er een waarde van a, zo dat het stelsel een oplossing met $z = -\frac{1}{2}$ heeft?

Opgave 2. (13 punten)
Zij $A \in M_3(\mathbb{R})$ gegeven door

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -5 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bereken de determinant van A.

(ii) Bepaal $\det(cI_3 - A)$.

(iii) Bereken alle eigenwaarden en de bijhorende eigenvectoren van A.

(iv) Geef een inverteerbare matrix T en een diagonaalmatrix D aan zo dat $A = TDT^{-1}$.

(v) Bewijs dat $A^{2008} \neq I_3$.

z.o.z.

Opgave 3. (13 punten)

(i) Bepaal voor de 3×3 matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

de inverse matrix A^{-1} en de geadjungeerde matrix $adj A$.

(ii) Zij $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ gedefinieerd door:

$$(A_n)_{ij} := \begin{cases} 2 & \text{als } i = j, \\ 1 & \text{als } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases} \text{ (dus bijvoorbeeld } A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}).$$

Bepaal $\det A_n$ voor $n = 2$, $n = 20$, $n = 200$ en $n = 2008$.

Opgave 4. (12 punten)
Bewijs of weerleg met een tegenvoorbeeld de volgende beweringen:

(i) Zij $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ en stel dat A en $A^{-1}BA$ inverteerbaar zijn. Dan is ook B inverteerbaar.

(ii) Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ een bovendriehoeksmatrix met $\det A = 0$. Dan is $A + A^t$ niet inverteerbaar.

(iii) Zij $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, dan geldt $\det A(B + C) = \det AB + \det AC$.

(iv) Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$. Als λ een eigenwaarde van A is, dan is λ ook een eigenwaarde van A^t.

Succes ermee!