Opgaven week 2

Opgave 5.

Zij $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ de matrix van het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_n + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

In de eerste les hebben we drie soorten bewerkingen gebruikt om zo'n stelsel vergelijkingen op te lossen:

1) Optellen van a keer de j-de rij bij de i-de.

2) Vermenigvuldigen van de i-de rij met $a \neq 0$.

3) Verruilen van de i-de en de j-de rij.

Geef aan hoe de toepassing van ieder van deze bewerkingen de matrix van het stelsel verandert.

Opgave 6.
Zij $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Bepaal alle $B \in M_2(\mathbb{R})$ met $BA = AB$. Laat zien dat iedere B met deze eigenschap te schrijven is als $xI_2 + yA$ voor zekere $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 7.
Zij $A = (a_{ij})$ een $n \times n$ matrix. We definiëren het *spoor* van A (notatie: Tr(A), van het Engelse "Trace") door

$$\mathrm{Tr(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

d.w.z. het spoor is de som van de elementen op de diagonaal van A.
Bewijs voor $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ de volgende uitspraken:

i) $\mathrm{Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)}$;

ii) $\mathrm{Tr(cA) = cTr(A)}$ voor alle $c \in \mathbb{R}$;

iii) $\mathrm{Tr(AB) = Tr(BA)}$;

iv) $\mathrm{Tr(ABC) = Tr(BCA) = Tr(CAB)}$.

v) Geldt ook Tr(ABC) = Tr(ACB)? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

Opgave 8.
Een netwerk met 5 stations wordt beschreven door de adjacency matrix

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uit de symmetrie van de matrix blijkt dat alle verbindingen tweerichtingsverbindingen zijn.

(i) Teken een plaatje van het netwerk.

(ii) Welke paren van stations zijn door een eenduidig pad van lengte hoogstens 2 verbonden?

(iii) Bepaal het aantal paden van lengte (precies) 3 die van station P_2 naar station P_3 lopen.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la1_07/la1.html