Opgaven week 3

Opgave 9.
Zij $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$.
Bestaan er matrices $B, C \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ met $AB = I_2$ resp. $CA = I_3$? Zo ja, zijn deze matrices eenduidig?

Opgave 10.
Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(i) Stel dat $A^k = I_n$ voor een zekere $k \in \mathbb{N}$. Laat zien dat A inverteerbaar is. Wat is de inverse van A?

(ii) Stel dat voor een zekere $k \geq 2$ geldt dat A^k niet inverteerbaar is. Toon aan dat ook A niet inverteerbaar is.

(iii) Stel dat voor een zekere $k \in \mathbb{N}$ geldt dat $A^k = 0$. Laat zien dat in dit geval $I_n + A$ inverteerbaar is met

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - A + A^2 - A^3 + \ldots + (-1)^{k-1}A^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i A^i.$$

(iv) Bepaal voor $A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ met $a, b, c \in \mathbb{R}$ de inverse matrix A^{-1}.

Opgave 11.
Een matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ heet een *monomiale* matrix als iedere rij en iedere kolom van A precies één element $\neq 0$ bevat. Zo'n monomiale matrix heet een *permutatiematrix* als iedere rij en iedere kolom precies één 1 en anders nullen bevat.

(i) Ga na dat iedere monomiale matrix een product is van een permutatiematrix P en een diagonale matrix $D = \mathrm{diag}(\mathrm{d}_1, \ldots, \mathrm{d}_\mathrm{n})$ met $d_i \neq 0$ voor $1 \leq i \leq n$.

(ii) Laat zien dat een permutatiematrix P inverteerbaar is met $P^{-1} = P^t$.

(iii) Laat zien dat een diagonale matrix $D = \mathrm{diag}(\mathrm{d}_1, \ldots, \mathrm{d}_\mathrm{n})$ inverteerbaar is d.e.s.d.a. alle $d_i \neq 0$ en dat in dit geval $D^{-1} = \mathrm{diag}(\frac{1}{\mathrm{d}_1}, \ldots, \frac{1}{\mathrm{d}_\mathrm{n}})$ geldt.

(iv) Concludeer dat monomiale matrices inverteerbaar zijn en geef de inverse aan (m.b.t. de ontbinding in een permutatiematrix en een diagonale matrix).

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la1_07/la1.html