Opgaven week 5

Opgave 17.
Laat zien dat voor een inverteerbare matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ geldt dat

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Opgave 18.
Laten $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_m(\mathbb{R})$ en $C \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ en zij

$$M := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{n+m}(\mathbb{R}).$$

Toon aan dat $\det M = \det A \cdot \det B$.

Opgave 19.

(i) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is $\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *niet* inverteerbaar?

(ii) Voor welke combinatie van getallen $a, b \in \mathbb{R}$ is $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ wel inverteerbaar?

(iii) Zij $V := \{(a,b,c) \in M_{1,3}(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ is niet inverteerbaar$\}$.
Vind twee rijtjes (a_1, b_1, c_1) en (a_2, b_2, c_2) zodat

$$V = \{\lambda_1(a_1, b_1, c_1) + \lambda_2(a_2, b_2, c_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Opgave 20.
Zij $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ met

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dus } (A_n)_{ij} := \begin{cases} 2 & \text{als } i = j, \\ -1 & \text{als } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Laat (bijvoorbeeld met inductie) zien dat $\det A_n = n + 1$.
Hoe verandert het resultaat als op de plaats $(n-1, n)$ een -2 i.p.v. een -1 staat, dus als de 2×2 blok rechts onder $\boxed{\begin{matrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{matrix}}$ wordt?

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la1_07/la1.html