Tentamen Lineaire Algebra 1

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan,

Opgave 1. (10 punten)
We bekijken het volgende stelsel lineaire vergelijkingen, dat een parameter $a \in \mathbb{R}$ bevat:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ -2x \qquad + 2z &= 2 \\ x + a^2 y + z &= 0. \end{aligned}$$

(i) Bepaal de waarden van de parameter a waarvoor het stelsel precies één oplossing heeft.

(ii) Is er ook een waarde van a zo dat het stelsel oneindig veel oplossingen heeft? Zo ja, bepaal zo'n waarde, zo niet, geef een reden.

(iii) Voor welke waarden van de parameter a heeft het stelsel een oplossing met $z = 2$?

Opgave 2. (15 punten)
We bekijken de 3×3 matrix

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Bereken de determinant $\det A$ van A.

(ii) Bepaal $\det(cI_3 - A)$.

(iii) Bereken alle eigenwaarden en de bijhorende eigenvectoren van A.

(iv) Geef een inverteerbare matrix T en een diagonaalmatrix D aan zo dat $A = TDT^{-1}$.

(v) Bewijs dat $A^{2007} = A$.

Opgave 3. (13 punten)

(i) Bepaal de geadjungeerde matrix $adj A$ van de matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Zij $T_n \in M_n(\mathbb{R})$ gedefinieerd door:

$$(T_n)_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{als } i = j, \\ 1 & \text{als } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{anders,} \end{cases} \quad \text{(dus bijvoorbeeld } T_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\text{).}$$

Laat zien dat

$$\det T_n = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1, \\ 0 & \text{als } n = 2, \\ \det T_{n-1} - \det T_{n-2} & \text{als } n \geq 3. \end{cases}$$

(Hieruit volgt dat $\det T_n = \begin{cases} 1 & \text{als } n \equiv 1, 0 \bmod 6, \\ 0 & \text{als } n \equiv 2, 5 \bmod 6, \\ -1 & \text{als } n \equiv 3, 4 \bmod 6, \end{cases}$ maar dat hoef je *niet* te bewijzen.)

Opgave 4. (12 punten)
Bewijs of weerleg met een tegenvoorbeeld de volgende beweringen:

(i) Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dan zijn de matrices $A + A^t$ en AA^t symmetrisch.

(ii) Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ een bovendriehoeksmatrix met $\det A = 0$ en zij I_n de $n \times n$ eenheidsmatrix. Dan is $I_n + A$ een inverteerbare matrix.

(iii) Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$. Als λ en μ eigenwaarden van A zijn, dan is $\lambda\mu$ een eigenwaarde van A^2.

(iv) Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ en $k \in \mathbb{N}$ met $A^k = 0$. Dan is 0 een eigenwaarde van A.

Succes ermee!