Tentamen Lineaire Algebra 1

1 november 2005, 9.00-12.00 uur, Examenzaal

Maak iedere opgave op een apart blaadje voorzien van je naam en studentnummer.

1. i) (`4 pnt`) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ heeft het volgende stelsel vergelijkingen precies één oplossing

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ -2x + + 2z &= 2 \\ x + a^2y + z &= 0 \end{aligned}$$

Oplossing: Het stelsel heeft precies één oplossing als de coëfficiëntenmatrix inverteerbaar is. De determinant van deze matrix is gelijk aan $4 - 6a^2$. Dus moet $a^2 \neq \frac{2}{3}$.

ii) (`3 pnt`) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ heeft bovenstaand stelsel oneindig veel oplossingen.

Oplossing: voor geen enkele a, want als $a^2 = \frac{2}{3}$ dan is het stelsel strijdig. Uit $x+y+2z = 1$ en $-2x+2z = 2$ volgt dat $y+3z = 2$. Uit $-2x+2z = 2$ en $x + \frac{2}{3}y + z = 0$ volgt dat $\frac{2}{3}y + 2z = 2$ dus $y + 3z = 3$. Dit levert een tegenspraak.

iii) (`3 pnt`) Bepaal een kromme van de vorm $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ door de punten $(0, 1), (1, 1), (-1, 5)$ en $(2, -1)$.

Oplossing: dit leidt tot het stelsel vergelijkingen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

met als oplossingen $a = 1,\ b = -1,\ c = 2,\ d = -1$. De gevraagde kromme is dus $y = 1 - x + 2x^2 - x^3$.

2. (`10 pnt`) Decodeer de boodschap $55, 49, 75, 53, 45, 72, 51, 34, 72$ gecodeerd m.b.v. de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Oplossing: de inverse van de coderingsmatrix is $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & -5 \\ 17 & -2 & -11 \end{pmatrix}$. De gedecodeerde boodschap is dus

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 55 & 53 & 51 \\ 49 & 45 & 34 \\ 75 & 72 & 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 & 9 \\ 16 & 19 & 14 \\ 12 & 19 & 7 \end{pmatrix}.$$

Gedecodeerd: OPLOSSING.

3. Bewijs of weerleg met een tegenvoorbeeld de volgende beweringen
   i) (2 pnt) Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Als $A^3 = A$, dan $A = O$ of I_n of $-I_n$.
   Dit is niet juist. Tegenvoorbeeld: $A = P_{12} \in M_2(\mathbb{R})$.
   ii) (2 pnt) Zij $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Als AB inverteerbaar is, dan is A inverteerbaar.
   Dit is juist: Als AB inverteerbaar is, dan is $\det(AB) \neq 0$. Dus ook $\det(A) \cdot \det(B) \neq 0$. Dan is $\det(A) \neq 0$ dus is A inverteerbaar.
   iii) (2 pnt) Zij $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Als λ een eigenwaarde van A is en μ een eigenwaarde van B, dan is $\lambda\mu$ een eigenwaarde van AB.
   Onjuist: neem $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. De eigenwaarden van AB zijn λ en μ.
   iv) (2 pnt) Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ met $\det A = 0$. Dan bestaat $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ met $Ax = 0$.
   Juist: als $\det(A) = 0$ dan is A niet inverteerbaar. Gebruik nu Stelling 2.4.6.
   v) (2 pnt) Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ met $A^3 = 0$. Dan is 0 een eigenwaarde van A.
   Dit is juist: Als $A^3 = 0$ dan $\det(A)^3 = 0$ dus is A niet inverteerbaar. De eigenwaardevergelijking $\det(cI_n - A) = 0$ heeft dan de oplossing $c = 0$ dus is 0 eigenwaarde van A.

4. i) (7 pnt) Gegeven de rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ met $a_0 = 3$, $a_1 = 1$ en $a_{n+2} = -a_{n+1} + 6a_n$ voor alle $n \geq 0$. Geef een formule voor a_n.
   Laat $v_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ en $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dan is $v_n = A^n v_0$. De eigenwaarden van A zijn 2 en -3 met bijbehorende eigenvectoren $(2, 1)$ en

$(2,-1)$. Dus met

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

geldt dat $A = TDT^{-1}$ dus

$$\begin{aligned} A^n v_0 &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & (-1)^n 3^{n+1} \\ 2^n & (-1)^{n+1} 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dus $a_n = 2^{n+1} + (-3)^n$.

ii) (3 pnt) Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ een niet inverteerbare matrix. Laat $x, b \in \mathbb{R}^n$ voldoen aan $Ax = b$. Bereken $(ad_j A).b$.

Oplossing: Uit $b = Ax$ volgt dat $(ad_j A).b = (ad_j A)Ax = \det(A)x$.