

Complexe getallen

Iedereen weet, dat kwadraten van getallen positieve getallen zijn. Dat is vaak erg praktisch, we weten bijvoorbeeld dat de functie $f(x) := x^2 + 1$ steeds positief is en in het bijzonder geen nulpunten heeft. Daarom is bijvoorbeeld ook de functie $f(x) := \frac{1}{x^2+1}$ voor alle waarden van x gedefinieerd, omdat de noemer nooit 0 wordt.

Aan de andere kant is het feit, dat kwadraten positief zijn, ook een bron van frustratie, we kunnen namelijk vergelijkingen van de vorm $X^2 = a$ voor $a < 0$ niet oplossen.

Nu is het een typische eigenschap van wiskundigen, dat ze in een voor gewone mensen hopeloze situatie (een situatie zonder oplossing) toch vooruit gaan: ze definiëren gewoon iets, waarmee ze verder kunnen.

Er zijn mensen die beweren dat wiskundigen mensen zijn die geen weg weten met de reële wereld en zich daarom hun eigen wereld definiëren waarin ze zich thuis voelen.

In sommige gevallen zijn de nieuw gedefinieerde objecten misschien niet zo erg nuttig, maar in het geval van de oplossingen van kwadratische vergelijkingen bleek de definitie van de *complexe getallen* een echt succesverhaal te zijn.

1. Constructie van de complexe getallen

Het idee achter de *complexe getallen* is dat we een oplossing van de vergelijking $X^2 = -1$ definiëren en kijken wat er gebeurt als we deze oplossing aan de reële getallen $\mathbb{R}$ toevoegen.

Definitie: We noteren de (symbolische) oplossing van de kwadratische vergelijking $X^2 = -1$ met de letter i en noemen i de *imaginaire eenheid*. Voor de imaginaire eenheid i geldt dus dat $i^2 = -1$.

Let op: In de wiskunde staat steeds het symbool i voor de imaginaire eenheid. Maar omdat in de natuurkunde en elektrotechniek traditioneel de letter I (en vroeger ook i) voor de *stroomsterkte* gebruikt wordt, wordt in deze disciplines soms j voor de imaginaire eenheid geschreven.

Wat betekent het nu dat we i aan de reële getallen *toevoegen*? We willen zeker dat we i met een willekeurig reëel getal y kunnen vermenigvuldigen, dit geeft getallen van de vorm $i \cdot y$.

Het aardige is dat we hiermee al uit ieder reëel getal de wortel kunnen trekken, want voor $a \geq 0$ konden we dit al eerder en voor $a < 0$ is $-a > 0$, dus bestaat er een $b \in \mathbb{R}$ met $b^2 = -a$ en we hebben $(i \cdot b)^2 = i^2 \cdot b^2 = (-1) \cdot (-a) = a$.

Maar we willen getallen natuurlijk ook optellen, daardoor krijgen we alle getallen van de vorm $x + i \cdot y$ met $x, y \in \mathbb{R}$. De positieve verrassing ligt in het feit, dat dit ook voldoende is, d.w.z. dat we geen verdere getallen meer nodig hebben om goed met i te kunnen rekenen:

- Het *optellen* van getallen van de vorm $x + i \cdot y$ gebeurt componentsgewijs, waarbij we x en y als de componenten van het getal beschouwen, dus

$$(x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2).$$

- Voor het *vermenigvuldigen* moeten we het product van twee getallen gewoon uitwerken, waarbij we natuurlijk gebruik ervan maken dat $i^2 = -1$ is:

$$\begin{aligned}(x_1 + i \cdot y_1)(x_2 + i \cdot y_2) &= x_1x_2 + i \cdot (x_1y_2 + y_1x_2) + i^2 \cdot y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i \cdot (x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned}$$

Voorbeeld: We hebben $(1 + i \cdot 2) + (3 - i) = (1 + 3) + i \cdot (2 - 1) = 4 + i$ en $(1 + i \cdot 2)(3 - i) = (3 - (-2)) + i \cdot (-1 + 6) = 5 + i \cdot 5$.

Definitie: De verzameling

$$\mathbb{C} := \{x + i \cdot y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

met de bewerkingen

$$\begin{aligned}(x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) &= (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2) \\ (x_1 + i \cdot y_1)(x_2 + i \cdot y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i \cdot (x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned}$$

heet het *lichaam* $\mathbb{C}$ *der complexe getallen*.

Notatie: Net zo goed als $1 + i \cdot 2$ kunnen we natuurlijk ook $1 + 2i$ schrijven en in feite is $x + yi$ in het algemeen de gebruikelijkere schrijfwijze dan $x + i \cdot y$.

We mogen de verzameling $\mathbb{C}$ een *lichaam* noemen, omdat optellen en vermenigvuldigen commutatief ($a + b = b + a$ en $ab = ba$) en associatief ($(a + b) + c = a + (b + c)$ en $(ab)c = a(bc)$) zijn en omdat de vermenigvuldiging distributief over het optellen is ($a(b + c) = ab + ac$ en $(a + b)c = ac + bc$). Deze eigenschappen erven de complexe getallen gewoon van de reële getallen.

In een lichaam moet verder nog gelden, dat we door ieder element $\neq 0$ kunnen delen. Ook aan deze eigenschap voldoen de complexe getallen, want er geldt

$$\frac{1}{x + yi} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i.$$

Waar deze formule vandaan komt, zullen we pas iets later toelichten, maar we controleren wel even dat het product van $x + yi$ en $\frac{1}{x + yi}$ inderdaad 1 is:

$$\begin{aligned}(x + yi) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i \right) &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{xy}{x^2 + y^2} i + \frac{yx}{x^2 + y^2} i - \frac{y^2}{x^2 + y^2} i^2 \\ &= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1\end{aligned}$$

Omdat we de complexe getallen verkregen hebben door i aan de reële getallen toe te voegen, zijn de reële getallen in de complexe getallen bevat, namelijk als de getallen van de vorm $x + i \cdot 0$ met $x \in \mathbb{R}$. Aan de andere kant noemt men de getallen van de vorm $i \cdot y$ met $y \in \mathbb{R}$ *zuiver imaginair*.

We hebben al gezien dat een complex getal $z \in \mathbb{C}$ eenduidig door twee reële getallen beschreven wordt, namelijk door $x, y \in \mathbb{R}$ zo dat $z = x + i \cdot y$. Voor de twee componenten x en y van een complex getal zijn de volgende notaties gebruikelijk:

Definitie: De eerste component x van $z = x + i \cdot y$ heet het *reële deel* van z , genoteerd met $x = \Re(z)$ of $x = \operatorname{Re}(z)$ en de tweede component y heet het *imaginaire deel* van z , genoteerd met $y = \Im(z)$ of $y = \operatorname{Im}(z)$. Er geldt dus:

$$z = \Re(z) + i \cdot \Im(z).$$

Het is gebruikelijk dat complexe getallen of complexe variabelen z heten, terwijl reële getallen x en y heten. Dit is natuurlijk geen garantie, maar als je de letter z in een formule tegen komt, is dit een sterk signaal dat je het misschien met complexe getallen te maken hebt.

OPDRACHT 1 Schrijf de volgende complexe getallen in de standaard vorm $z = x + yi$:

- (i) $(1 + 2i) - 3(5 - 2i)$;
- (ii) $(4 - 3i)(8 + i) + 5 - i$;
- (iii) $(2 + i)^2$.

2. Meetkunde van de complexe getallen

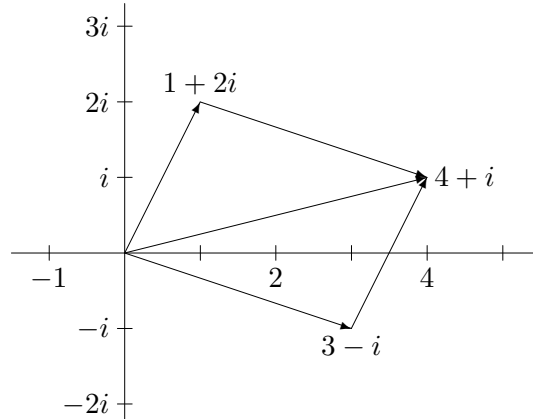
We hebben ons tot nu toe tot algebraïsche eigenschappen van de complexe getallen beperkt, maar een belangrijke rol spelen ook de meetkundige eigenschappen.

2.1 Cartesische coördinaten

We hebben gezien, dat een reëel getal via het reële en imaginaire deel met een paar van reële getallen correspondeert. Dit geeft een identificatie van de complexe getallen met het gewone 2-dimensionale vlak, het getal $z = x + i \cdot y$ correspondeert hierbij met het punt (x, y) en op grond van deze correspondentie spreekt men ook vaak van het *complexe vlak* in plaats van de complexe getallen.

We hebben al gezien dat het optellen van complexe getallen componentsgewijs voor het reële en imaginaire deel gebeurt. Maar dat is precies de manier hoe we vectoren in $\mathbb{R}^2$ (d.w.z. 2-tupels) optellen en daarom is het redelijk voor de hand liggend het getal $z = x + i \cdot y$ met de vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ te identificeren. Het voordeel ervan, bij complexe getallen aan vectoren in plaats van punten te denken, is dat we van vectoren weten hoe we ze optellen, terwijl we hiervoor bij punten toch stiekem weer vectoren zouden gebruiken.

Als voorbeeld geeft het plaatje in Figuur 1 het optellen van de complexe getallen $1 + 2i$ en $3 - i$ in het complexe vlak weer.



Figuur 1: Optellen in het complexe vlak

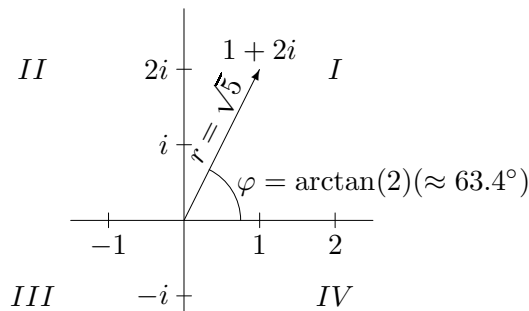
Een voor de hand liggende vraag is nu natuurlijk, of ook de vermenigvuldiging van complexe getallen een mooie meetkundige interpretatie heeft. Dit is inderdaad het geval, maar het verhaal is iets ingewikkelder dan voor het optellen.

2.2 Poolcoördinaten

Om te beginnen, hebben we hiervoor een andere manier van beschrijving van punten in het 2-dimensionale vlak nodig, namelijk de zogeheten *poolcoördinaten*.

Elk punt P in het vlak kan behalve door zijn *Cartesische coördinaten* (x, y) ook in de vorm (r, φ) aangegeven worden, waarbij r de afstand van het nulpunt is en φ de hoek tussen de x -as en de verbinding van het nulpunt met P (tegen de klok gemeten). Tussen de gewone Cartesische coördinaten (x, y) en de poolcoördinaten (r, φ) bestaat het volgende verband:

$$x = r \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\varphi) \quad \longleftrightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan(\varphi) = \frac{y}{x}.$$



Figuur 2: Poolcoördinaten

Merk op dat de relatie $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$ de hoek φ nog niet eenduidig vast legt, omdat $\tan(x)$ een periode van π en niet van 2π heeft. De omkeersfunctie $\arctan(x)$ heeft waarden tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$ en is negatief voor $x < 0$ en positief voor $x > 0$. We moeten daarom voor de vier kwadranten tussen de assen van het complexe vlak aparte definities nemen:

$$I : x > 0, y \geq 0: \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$II : x < 0, y \geq 0: \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$$

$$III : x < 0, y < 0: \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$$

$$IV : x > 0, y < 0: \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi$$

Voor (x, y) met $x = 0$ hebben we $\varphi = \frac{\pi}{2}$ als $y > 0$ en $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ als $y < 0$. Voor het nulpunt zelf is de hoek niet gedefinieerd.

OPDRACHT 2 Bepaal de poolcoördinaten van de volgende complexe getallen:

$$2i, \quad 1 - i, \quad \sqrt{3} + i, \quad -2 - \sqrt{12}i.$$

We hadden eerder al gezegd dat de gewone coördinaten van een punt z in het complexe vlak het reële en imaginaire deel van z heten. Maar ook voor de poolcoördinaten r en φ van een complex getal z bestaat een speciale notatie:

Definitie: Zij $z = x + yi$ een complex getal met poolcoördinaten (r, φ) :

- (i) Het getal $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ heet de *absolute waarde* of *modulus* van z en wordt genoteerd met $|z|$. Dit is de gewone (Euclidische) afstand van het nulpunt in $\mathbb{R}^2$ en komt voor $z \in \mathbb{R}$ overeen met de gewone absolute waarde van een reëel getal.
- (ii) Het getal φ met $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$ heet het *argument* van z en wordt met $\arg(z)$ genoteerd.

Voor een complex getal z met $|z| = r$ en $\arg(z) = \varphi$ geldt dus

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)).$$

We hebben al gezien dat voor twee complexe getallen $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ en $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ het product $z_1 z_2$ gegeven is door $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i \cdot (x_1 y_2 + y_1 x_2)$. Als we z_1 en z_2 in poolcoördinaten schrijven, dus $z_1 = (r_1, \varphi_1)$ en $z_2 = (r_2, \varphi_2)$, geeft dit volgens de boven aangegeven transformaties:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)) \cdot r_2(\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2)) \\ &= r_1 \cos(\varphi_1) r_2 \cos(\varphi_2) - r_1 \sin(\varphi_1) r_2 \sin(\varphi_2) \\ &\quad + i \cdot (r_1 \cos(\varphi_1) r_2 \sin(\varphi_2) + r_1 \sin(\varphi_1) r_2 \cos(\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)) \\ &\quad + i \cdot r_1 r_2 (\cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot r_1 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2). \end{aligned}$$

In de laatste stap hebben we een opteltheorema toegepast dat we hier niet verder gaan toelichten (maar dat wel in gebruikelijke formulekaarten te vinden is):

$$\begin{aligned}\cos(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) &= \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2).\end{aligned}$$

De gevonden relatie

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot r_1 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

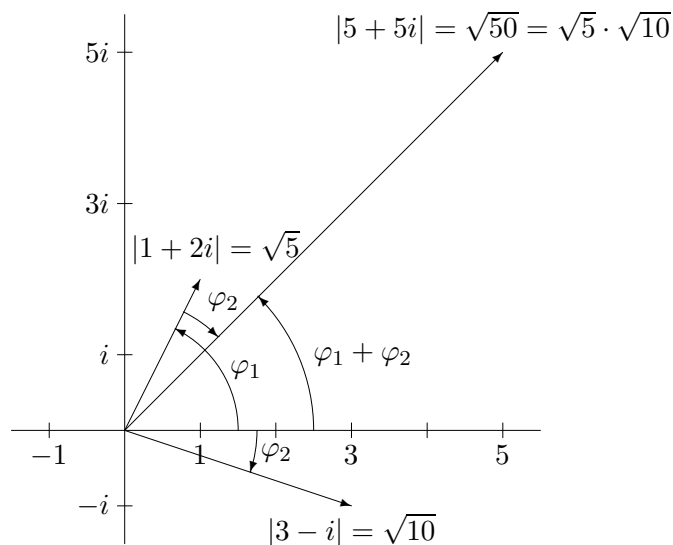
betekent nu het volgende:

Voor complexe getallen z_1 met poolcoördinaten (r_1, φ_1) en z_2 met poolcoördinaten (r_2, φ_2) heeft het product $z_1 z_2$ de poolcoördinaten $(r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$, d.w.z. de absolute waarden r_1 en r_2 worden vermenigvuldigd en de argumenten φ_1 en φ_2 opgeteld.

Samenvatting: Twee complexe getallen worden met elkaar vermenigvuldigd door hun absolute waarden te vermenigvuldigen en hun argumenten bij elkaar op te tellen.

Meetkundig uitgedrukt vermenigvuldigen we een complex getal z_1 met een complex getal z_2 door z_1 met de lengte (absolute waarde) van z_2 te schalen en vervolgens om het argument van z_2 (tegen de klok) te draaien.

Voor het product $(1 + 2i)(3 - i)$ geeft het plaatje in Figuur 3 de meetkundige interpretatie van de vermenigvuldiging weer.



Figuur 3: Vermenigvuldigen in het complexe vlak

Een belangrijke toepassing van de meetkundige interpretatie van het vermenigvuldigen van complexe getallen is de *Regel van de Moivre*. Een complex getal z met absolute waarde 1 kunnen we schrijven als $z = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$, waarbij

$\varphi = \arg(z)$. Maar de n -de macht z^n kunnen we nu makkelijk berekenen, de absolute waarde is nog steeds 1 en het argument is het n -voud van het argument van z , dus $\arg(z^n) = n \arg(z) = n\varphi$. Dit betekent dat $z^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)$ en dit geeft de

Regel van de Moivre:

$$(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi).$$

Als toepassing hiervan kunnen we eenvoudig formules voor de *sinus* of *cosinus* van het dubbele of drievoud van een hoek afleiden, bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \Re(\cos(2x) + i \cdot \sin(2x)) = \Re((\cos(x) + i \cdot \sin(x))^2) \\ &= \Re(\cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i \cdot \cos(x) \sin(x)) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \Im(\cos(3x) + i \cdot \sin(3x)) = \Im((\cos(x) + i \cdot \sin(x))^3) \\ &= \Im(\cos^3(x) + 3i \cdot \cos^2(x) \sin(x) - 3 \cos(x) \sin^2(x) - i \cdot \sin^3(x)) \\ &= 3 \cos^2(x) \sin(x) - \sin^3(x). \end{aligned}$$

OPDRACHT 3 Druk met behulp van de regel van de Moivre uit:

- (i) $\cos(4\varphi)$ met behulp van $\cos(\varphi)$ en $\sin(\varphi)$,
- (ii) $\sin(3\varphi)$ met behulp van $\sin(\varphi)$ (zonder $\cos(\varphi)$).

3. Complexe conjugatie

Een belangrijke operatie op de complexe getallen is de *complexe conjugatie* die van een getal $z = x + i \cdot y$ het nieuwe getal

$$\bar{z} := x - i \cdot y$$

maakt, dat de *complex geconjugeerde van z* heet. Soms wordt de complex geconjugeerde ook met z^* in plaats van $\bar{z}$ genoteerd.

Omdat bij de complexe conjugatie het reële deel van een getal hetzelfde blijft en het imaginaire deel op zijn negatieve waarde gaat, is de complexe conjugatie gewoon de spiegeling in de x -as van het complexe vlak.

Men ziet rechtstreeks in dat z en $\bar{z}$ dezelfde absolute waarde $\sqrt{x^2 + y^2}$ hebben en dat het argument van $\bar{z}$ het negatieve van het argument van z is, dus $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.

Verder geldt $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$, want $(x + i \cdot y)(x - i \cdot y) = x^2 + y^2$. Dit geeft nu de toelichting voor de formule voor het inverteren van een complex getal, die we in het begin van deze les hebben gezien:

$$(x + yi)^{-1} = z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2},$$

de inverse van z is dus de complex geconjugeerde $\bar{z}$ van z gedeeld door het kwadraat $|z|^2$ van de absolute waarde van z .

Dat de inverse van z een veelvoud van $\bar{z}$ moet zijn, hadden we natuurlijk ook al uit de argumenten kunnen aflezen, want uit $\arg(1) = 0$ volgt $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) = \arg(\bar{z})$.

We kunnen nu ook een willekeurige breuk van complexe getallen op standaardvorm brengen, want

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \bar{z}_2.$$

Voorbeeld: Er geldt $\frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{2} = \frac{1}{2}(-2 + 2i) = -1 + i$.

Met behulp van de complex geconjugeerde kunnen we ook reëel en imaginair deel van een complex getal z makkelijk uitdrukken:

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{en} \quad \Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

In het bijzonder is een getal $z \in \mathbb{C}$ een reëel getal, dan en slechts dan als $\bar{z} = z$.

4. Formule van Euler

We hebben in het kader van de poolcoördinaten al gezien dat er een nauw verband tussen complexe getallen en sinus- en cosinusfuncties bestaat. Maar dit verband gaat veel verder, uiteindelijk laten zich voor de complexe getallen sinus- en cosinusfuncties volledig door de complexe exponentiële functie beschrijven. We zullen hier alleen maar een aanzet geven, die de eerste stap in dit verband toelicht.

Het eerste waar we iets over moeten zeggen zijn uitdrukkingen van de vorm $e^{i \cdot y}$ waarbij $y \in \mathbb{R}$. Als dit lukt, kunnen we ook voor $z = x + i \cdot y$ de e -macht definiëren, namelijk door $e^z = e^{x+i \cdot y} = e^x \cdot e^{i \cdot y}$.

Met behulp van de complexe exponentiële functie laat zich een zuivere motivatie geven voor de volgende relatie voor $e^{i\varphi}$, die bekend staat als *Formule van Euler*. Hier laten we deze formule echter min of meer uit de lucht vallen.

Het idee achter de complexe exponentiële functie zit in het gebruik van *machtsreeksen*. De gewone (reële) exponentiële functie laat zich namelijk beschrijven door de oneindige som

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n.$$

Omdat we weten hoe optellen en vermenigvuldigen voor complexe getallen werken, kunnen we deze oneindige som (in principe) ook voor complexe getallen x uitwerken, en het blijkt dat de som altijd een eenduidig complex getal oplevert. Dit neemt men als definitie voor de complexe exponentiële functie.

Formule van Euler:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi).$$

Volgens deze formule is het getal $e^{i\varphi}$ juist het complexe getal met absolute waarde 1 en argument φ . Als φ van 0 tot 2π loopt, loopt $e^{i\varphi}$ één keer rond de *eenheidscirkel*, d.w.z. de cirkel van straal 1 rond 0 in het complexe vlak.

Zonder de complexe exponentiële functie kunnen we alvast twee redenen aangeven, die de Formule van Euler plausibel maken.

- (1) Als we i (net als $\sqrt{2}$ of π) als een constante beschouwen, is de functie $f(\varphi) := e^{i\varphi}$ een functie van een reële veranderlijke die we kunnen afleiden, en dit geeft

$$\begin{aligned} f'(\varphi) &= (e^{i\varphi})' = (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))' \\ &= -\sin(\varphi) + i \cdot \cos(\varphi) = i \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = i \cdot e^{i\varphi} = i \cdot f(\varphi). \end{aligned}$$

Maar dit is precies wat we volgens de kettingregel zouden verwachten, want voor de reële exponentiële functie geldt $(e^{ax})' = a \cdot e^x$.

- (2) Volgens onze definitie geldt dat

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1 + i\varphi_2}$$

omdat we getallen op de eenheidscirkel vermenigvuldigen door hun argumenten op te tellen. Onze definitie komt dus overeen met de eigenschap $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ van de reële exponentiële functie.

Met behulp van de relatie $e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ en de symmetrieeigenschappen $\cos(-x) = \cos(x)$ en $\sin(-x) = -\sin(x)$ kunnen we nu $\sin(x)$ en $\cos(x)$ op de exponentiële functie terug brengen, want er geldt:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} &= \cos(\varphi) + \cos(-\varphi) + i \cdot (\sin(\varphi) + \sin(-\varphi)) = 2\cos(\varphi), \\ e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} &= \cos(\varphi) - \cos(-\varphi) + i \cdot (\sin(\varphi) - \sin(-\varphi)) = 2i\sin(\varphi) \end{aligned}$$

en hiermee volgt

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{en} \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

We komen nu nog een keer terug op de regel van de Moivre, met onze nieuwe definitie ziet die er namelijk heel eenvoudig uit:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{i(n\varphi)}.$$

Ook de opteltheorema's $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)$ en $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)$ die we in het kader van de poolcoördinaten hebben toegepast kunnen we meteen uit de reële en imaginaire delen van $e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$ aflezen.

Als toegift geven we een beroemde formule aan, die de meest belangrijke constanten 0, 1, i , e en π in een relatie brengt:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

5. Toepassingen van de complexe getallen

Op grond van de samenhang $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ zijn complexe getallen in alle toepassingen belangrijk die met golven te maken hebben. Voorbeelden hiervoor zijn:

- Het berekenen van het overlappen van twee of meer golven (bijvoorbeeld watergolven, maar ook elektromagnetische golven).
- Kwantummechanica: een deeltje wordt door een golffunctie beschreven, waarvan de absolute waarde de kans aangeeft, het deeltje in een zeker gebied te vinden.
- MP3-speler: In de Fourieranalyse wordt een geluidssignaal beschreven door een som van *sinus*-functies voor verschillende frequenties. De amplituden voor de verschillende frequenties bepalen de klank van het signaal. Door zich op de meest belangrijke frequenties te concentreren en frequenties met kleine amplituden te verwaarlozen, laat zich het signaal zeer compact opslaan. In de meeste gevallen is het verlies aan kwaliteit daarbij gering.