

Tentamen Lineaire Algebra 1 (kans B)

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan,

Opgave 1. (9 punten)

In $\mathbb{R}^4$ zijn de vectoren

$$\begin{aligned}v_1 &:= (1, 0, 0, 1), & v_2 &:= (2, 0, 1, 1), & v_3 &:= (1, -1, 1, 1), \\v_4 &:= (2, -1, 0, 3), & v_5 &:= (0, -2, 1, 1)\end{aligned}$$

gegeven.

Bepaal een deelverzameling van de vectoren $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ die een basis van $L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ vormt.

Opgave 2. (7 punten)

Zij $V := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ is twee keer differentieerbaar}\}$ de $\mathbb{R}$ -vectorruimte van op $\mathbb{R}$ twee keer differentieerbare functies. Noteer de afgeleide van een functie $f \in V$ met f' en de tweede afgeleide met f'' .

Welke van de volgende deelverzamelingen van V zijn lineaire deelruimtes? Geef uitleg over je antwoorden.

(i) $U_1 := \{f \in V \mid f''(x) = -f(x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}.$

(ii) $U_2 := \{f \in V \mid f''(x) \leq f(x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}.$

(iii) $U_3 := \{f \in V \mid \text{er bestaat een } c \in \mathbb{R} \text{ met } f''(x) = cf(x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}.$

[Hint: Voor $f(x) = \sin(ax)$ geldt $f''(x) = -a^2 \sin(ax)$.]

Opgave 3. (6 punten)

Zij V een vectorruimte en zij $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ een lineair onafhankelijk stelsel in V .

Zij $w \in V$, $w \neq 0$ en stel dat $\dim L(v_1, v_2, \dots, v_n, w) = n$.

Laat zien dat er een index $i \in \{1, \dots, n\}$ is zo dat $(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)$ een basis van $L(v_1, v_2, \dots, v_n)$ is.

Opgave 4. (9 punten)

- (i) Laat zien dat

$$U := \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \mid z_1 + iz_2 - z_3 - iz_4 = 0\}$$

een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^4$ is.

- (ii) Bepaal de dimensie van U en geef een basis van U aan.
- (iii) Zij $U_{\mathbb{R}}$ de *reële* vectorruimte verkregen uit U door de scalaire vermenigvuldiging tot elementen $\lambda \in \mathbb{R}$ te beperken.

Wat is de dimensie van $U_{\mathbb{R}}$?

Opgave 5. (10 punten)

Zij V een vectorruimte met $\dim V = n$. Laten $U_1, U_2, U_3 \subset V$ lineaire deelruimten zijn met $\dim U_1 = \dim U_2 = \dim U_3 = 2$.

- (i) Laat zien dat $\dim(U_1 + U_2) \in \{2, 3, 4\}$.
- (ii) Voor welke dimensies n is het mogelijk dat $\dim((U_1 + U_2) \cap U_3) = 0$.
- (iii) Geef voor $n = 4$ voorbeelden van de drie mogelijke gevallen dat

$$\dim(U_1 + (U_2 \cap U_3)) = \begin{cases} 2 & \text{of} \\ 3 & \text{of} \\ 4. \end{cases}$$

Opgave 6. (9 punten)

Zij $v_1 := (2, 1, -1), v_2 := (1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$.

- (i) Laat zien dat het stelsel (v_1, v_2) lineair onafhankelijk is.
- (ii) Vind een vector $w \in \mathbb{R}^3$ die loodrecht op het vlak opgespannen door v_1 en v_2 staat en die het stelsel (v_1, v_2) tot een basis (v_1, v_2, w) van $\mathbb{R}^3$ uitbreidt.
- (iii) Vind een vector $w' \in \mathbb{R}^3$ die *niet* loodrecht op het vlak opgespannen door v_1 en v_2 staat en die het stelsel (v_1, v_2) tot een basis (v_1, v_2, w') van $\mathbb{R}^3$ uitbreidt.

Succes ermee!