

Huiswerk week 1

Opgave 1.

Laten X en Y *eindige* verzamelingen zijn. Het aantal elementen van deze verzamelingen geven we met $|X|$ en $|Y|$ aan.

- (i) Hoeveel verschillende afbeeldingen bestaan er van X naar Y ?
- (ii) Laat zien dat er voor $|X| > |Y|$ geen injectieve afbeelding en voor $|X| < |Y|$ geen surjectieve afbeelding van X naar Y bestaat. Concludeer dat er bijecties tussen twee eindige verzamelingen alleen maar kunnen bestaan als deze even veel elementen bevatten.
- (iii) Stel dat $|X| \leq |Y|$. Hoeveel injectieve afbeeldingen bestaan er dan van X naar Y ?
- (iv) Stel nu dat $|X| = |Y|$. Laat zien dat een afbeelding $f : X \rightarrow Y$ injectief is d.e.s.d.a. als f surjectief is. Hoeveel bijecties bestaan er dus in dit geval tussen X en Y ?

Opgave 2.

Zij $f : X \rightarrow Y$ een afbeelding X naar Y . Verder zijn $A, B \subset X$ willekeurige deelverzamelingen van X . Bewijs de volgende uitspraken:

- (i) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
- (ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- (iii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- (iv) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$.

Geef tegenvoorbeelden die aantonen dat in (iii) en (iv) gelijkheid in het algemeen niet geldt.

Opgave 3.

Laten $f : X \rightarrow Y$ en $g : Y \rightarrow Z$ afbeeldingen zijn en zij $g \circ f : X \rightarrow Z$ de samengestelde afbeelding van f en g . Laat zien dat de volgende implicaties gelden:

- (i) Als $g \circ f$ injectief is, dan is ook f injectief.
- (ii) Als $g \circ f$ surjectief is, dan is ook g surjectief.

Opgave 4.

Laten $f : X \rightarrow Y$ en $g : Y \rightarrow X$ afbeeldingen tussen de verzamelingen X en Y zijn zo dat $f \circ g = Id_Y$ en $g \circ f = Id_X$.

Laat zien dat f en g bijectief zijn en dat $g = f^{-1}$, d.w.z. g is de omkeerafbeelding van f .

Laat verder zien dat $(f^{-1})^{-1} = f$, d.w.z. de omkeerafbeelding van de omkeerafbeelding is weer de originele afbeelding.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la1_08/la1.html