

Huiswerk week 2

Opgave 5.

Zij V een (reële) vectorruimte, $x, y, z \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Bewijs vanuit de axioma's in de definitie van een vectorruimte:

- (i) $\lambda \cdot 0 = 0$ (waarbij 0 de nulvector in V is).
- (ii) Als $x + y = x + z$, dan is $y = z$.
- (iii) Als $\lambda \cdot x = 0$, dan is $\lambda = 0$ of $x = 0$.

Opgave 6.

Zij V een vectorruimte en laten U, W lineaire deelruimten van V zijn.

- (i) Laat zien dat $U \cap W$ ook een lineaire deelruimte van V is.
- (ii) Laat zien dat $U \cup W$ alleen maar een lineaire deelruimte van V is als $U \subset W$ of $W \subset U$.
- (iii) Bewijs dat $U \setminus W$ nooit een lineaire deelruimte van V is.

Opgave 7.

Zij $F_{\mathbb{R}} := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ is een afbeelding}\}$ de vectorruimte van reële functies van $\mathbb{R}$.

- (i) Voor welke $c \in \mathbb{R}$ is $U_c := \{f \in F_{\mathbb{R}} \mid f(1) = c\}$ een lineaire deelruimte van $F_{\mathbb{R}}$?
- (ii) Laat zien dat $U_p := \{f \in F_{\mathbb{R}} \mid f(x) = f(x + 2\pi) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$ een lineaire deelruimte van $F_{\mathbb{R}}$ is.
Opmerking: U_p heet de ruimte der 2π -periodieke functies.
- (iii) Een functie f heet *monotoon stijgend* als voor alle $x, x' \in \mathbb{R}$ met $x' \geq x$ geldt dat $f(x') \geq f(x)$, f heet *monotoon dalend* als voor alle $x, x' \in \mathbb{R}$ met $x' \geq x$ geldt dat $f(x') \leq f(x)$.

Zij $U_{ms} := \{f \in F_{\mathbb{R}} \mid f \text{ is monotoon stijgend}\}$, $U_{md} := \{f \in F_{\mathbb{R}} \mid f \text{ is monotoon dalend}\}$ en $U_{mon} := U_s \cup U_d$.

Geef aan welke van U_s , U_d en U_{mon} lineaire deelruimten van $F_{\mathbb{R}}$ zijn.

Opgave 8.

Een afbeelding $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ van de niet-negatieve gehele getallen naar de reële getallen wordt meestal als oneindige rij $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ geschreven, waarbij $a_i = f(i)$, d.w.z. door de beelden van $0, 1, 2, \dots$ achter elkaar in een rij te plaatsen.

Men gaat eenvoudig na (maar dat is hier niet gevraagd) dat de verzameling

$$R := \{(a_0, a_1, a_2, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ voor alle } i \geq 0\}$$

van oneindige rijen met componentsgewijs optellen en scalair vermenigvuldigen, d.w.z. met

$$\begin{aligned} (a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) &:= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots) \text{ en} \\ \lambda(a_0, a_1, a_2, \dots) &:= (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \dots) \text{ voor } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

een reële vectorruimte vormt. Merk op dat deze definitie van de optelling en scalaire vermenigvuldiging volstrekt analoog met de definities voor n -tupels en functies uit het college is.

- (i) Zij $P := \{(a_0, a_1, a_2, \dots) \in R \mid \text{er bestaat een } n \in \mathbb{N} \text{ zo dat } a_i = 0 \text{ voor alle } i > n\}$ de verzameling van rijen die na een eindig beginstuk constant 0 zijn, dus van rijen van de vorm $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$.

Laat zien dat P een lineaire deelruimte van R is.

Opmerking: De elementen van P laten zich ook als *veeltermen* interpreteren door de rij $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ met de veelterm $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ te identificeren.

- (ii) Zij $F := \{(a_0, a_1, a_2, \dots) \in R \mid a_{i+2} = a_{i+1} + a_i \text{ voor alle } i \geq 0\}$ de verzameling van *veralgemeende Fibonacci-rijen*.

Laat zien dat F een lineaire deelruimte van R is.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la1_08/la1.html