

Opgaven week 3

Opgave 9.

Schrijf de volgende complexe getallen in de vorm $x + yi$ (met $x, y \in \mathbb{R}$) en in poolcoördinaten:

$$(i) (1 - i\sqrt{3})^2 \qquad (ii) \frac{1+i}{i-1} \qquad (iii) \frac{3+4i}{2-i}$$

Hoe kan men de absolute waarde en het argument van deze getallen bepalen, zonder de getallen eerst in de vorm $x + yi$ te brengen?

Opgave 10.

Zij $\mathbb{F}$ een lichaam en $a, b, c \in \mathbb{F}$. Toon aan (uit de axioma's van een lichaam):

- (i) Als $a + b = a + c$, dan is $b = c$.
- (ii) Als $ab = 0$, dan is $a = 0$ of $b = 0$.
- (iii) Als $a^2 = b^2$, dan is $a = b$ of $a = -b$.
- (iv) Zij $a \neq 0$. Als $ab = ac$, dan is $b = c$.

Opgave 11.

Zij $\mathbb{F}_p$ het eindige lichaam met p elementen, verkregen door met de resten bij delen door p te rekenen.

- (i) Bepaal voor ieder van de priemgetallen $p = 3, 5, 7, 11$ het multiplicatieve inverse van 2 in $\mathbb{F}_p$.
- (ii) Vind in ieder van de lichamen $\mathbb{F}_p$ voor $p = 3, 5, 7, 11$ een element a zo dat de machten $a, a^2, a^3, \dots, a^{p-1}$ alle elementen van $\mathbb{F}_p$ behalve 0 doorlopen. (Hint: kijk naar kleine waarden van a .)

Opgave 12.

Zij $\mathbb{F}$ een eindig lichaam.

- (i) Zij $a \in \mathbb{F}$. Laat zien dat de verzameling $\{a + b \mid b \in \mathbb{F}\}$ alle elementen van $\mathbb{F}$ bevat.

Dit betekent dat in iedere rij (en vanwege de symmetrie ook in iedere kolom) van de tabel voor de optelling ieder element uit $\mathbb{F}$ voor moet komen.

(Hint: Gebruik deel (i) van Opgave 10.)

- (ii) Zij $a \in \mathbb{F}$, $a \neq 0$. Laat zien dat de verzameling $\{ab \mid b \in \mathbb{F}\}$ alle elementen van $\mathbb{F}$ bevat.

Dit betekent dat behalve voor de rij (en kolom) van 0 in iedere rij (en vanwege de symmetrie ook in iedere kolom) van de tabel voor de vermenigvuldiging ieder element uit $\mathbb{F}$ voor moet komen.

(Hint: Gebruik deel (iv) van Opgave 10.)

- (iii) Maak tabellen voor de optelling en vermenigvuldiging van een lichaam met 4 elementen, die de elementen $\{0, 1, a, b\}$ bevat. Een aanzet is hieronder gegeven:

+	0	1	a	b	·	0	1	a	b
0	0	1	a	b	0	0	0	0	0
1	1				1	0	1	a	b
a	a				a	0	a		
b	b				b	0	b		

(Hint: Maak gebruik van de uitspraken van de delen (i) en (ii)!)

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la1_08/la1.html