Huiswerk week 4

Opgave 13.
Zij $V := \mathbb{C}^2$ de complexe vectorruimte van paren complexe getallen, d.w.z. $V := \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$.
Voor $z = x + yi \in \mathbb{C}$ met $x, y \in \mathbb{R}$ noteren we met $\overline{z}$ de complex geconjugeerde $\overline{z} := x - yi$ van z.
Zij $U := \{(z, i \cdot z) \mid z \in \mathbb{C}\} \subset V$ en $W := \{(z, \overline{z}) \mid z \in \mathbb{C}\} \subset V$.

(i) Zijn U en W lineaire deelruimten van V? Geef een bewijs of een tegenargument.

(ii) Door de scalaire vermenigvuldiging tot factoren in $\mathbb{R}$ te beperken wordt V een *reële* vectorruimte die we voor de duidelijkheid met $V_{\mathbb{R}}$ noteren. Zijn de verzamelingen U en W lineaire deelruimten van $V_{\mathbb{R}}$?

Opgave 14.
De Europese artikelnummering **EAN** is een code voor bijna alle producten die te koop zijn en is vergezeld met een streepjescode. De meest gebruikelijke vorm van de EAN heeft 13 cijfers, waarvan de laatste een controlecijfer is. Deze wordt als volgt bepaald: De cijfers op de even posities worden bij elkaar opgeteld en met 3 vermenigvuldigd, vervolgens worden de cijfers op de oneven posities erbij opgeteld. Het resultaat moet dan een 10-voud zijn, d.w.z. geeft rest 0 bij delen door 10. M.a.w.: Een code $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{12} a_{13}$ is een geldige EAN als $a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + \ldots + 3a_{12} + a_{13}$ een 10-voud is.

(i) Is 9 783406 418716 een geldige EAN?

(ii) Bepaal het controlecijfer dat van 9 783540 78056? een geldige EAN maakt.

(iii) Laat zien dat de code voor de EAN een enkele fout (vervanging van een cijfer door een andere cijfer) altijd herkent, maar niet noodzakelijk twee fouten.

(iv) Laat zien dat de code voor de EAN niet alle fouten door verruilen van naburige cijfers herkent.

Merk op: De nieuwe ISBN-13 nummers volgen het schema van de EAN, de Amerikaanse UPC zijn codes van 12 cijfers die corresponderen met de EAN-codes waarbij het eerste cijfer 0 is.

Opgave 15.
Zij C een lineaire code van lengte n, d.w.z. C is een lineaire deelruimte van de vectorruimte $\mathbb{F}_2^n$ van n-tupels over het lichaam $\mathbb{F}_2$ met 2 elementen.

De *Hamming afstand* $d(v, w)$ van twee vectoren $v, w \in \mathbb{F}_2^n$ is gedefinieerd als het aantal componenten waarop v en w verschillen, bijvoorbeeld is $d((1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)) = 2$.
Het *gewicht* $wt(v)$ van een vector $v \in \mathbb{F}_2^n$ is gedefinieerd als het aantal componenten die niet 0 zijn, bijvoorbeeld is $wt((1, 0, 1, 1)) = 3$.
Het minimale gewicht dat een element $v \in C$, $v \neq 0$ heeft, heet het *minimale gewicht* van C.

(i) Zij $v, w \in \mathbb{F}_2^n$. Laat zien dat $d(v, w) = wt(v + w)$.

(ii) Laat zien dat de minimale Hamming afstand $d(v, w)$ die twee elementen $v \neq w$ van de lineaire code C hebben gelijk is aan het minimale gewicht van C.

(iii) Stel bij het versturen van $v \in C$ zijn k fouten opgetreden. Laat zien dat een lineaire code C met minimaal gewicht d dit voor $k \leq d - 1$ altijd kan herkennen maar niet noodzakelijk voor $k \geq d$.

(Hint: Fouten worden alleen maar herkend als ze van een $v \in C$ een vector $v' \in \mathbb{F}_2^n \setminus C$ maken, dus een vector die niet in de code ligt. Fouten die van een element van de code een ander element van de code maken, worden dus niet herkend.)

(iv) Laat zien dat een lineaire code C met minimaal gewicht d voor d even altijd $\frac{d}{2} - 1$ en voor d oneven steeds $\frac{d-1}{2}$ fouten kan verbeteren.

(Hint: Fouten die van een $v \in C$ een vector $v' \in \mathbb{F}_2^n \setminus C$ maken kunnen worden verbeterd, als v' dichter bij v ligt (volgens de Hamming afstand) dan bij ieder andere $w \in C$, dus als $d(v', v) < d(v', w)$ voor alle $w \in C$.)

(v) De volgende lineaire code $C \subset \mathbb{F}_2^{10}$ is zeer geschikt om 3 bits over een slechte kanaal te versturen. Zij C gedefinieerd door

$$C := \{(x, y, z, x, y, z, x + y, x + z, y + z, x + y + z) \in \mathbb{F}_2^{10} \mid x, y, z \in \mathbb{F}_2\}.$$

Bepaal het minimale gewicht van C en geef aan hoeveel fouten met deze code herkend en hoeveel fouten verbeterd kunnen worden.

(Dat C inderdaad een lineaire deelruimte van F_2^{10} is hoef je niet aan te tonen.)

Opgave 16.

(i) Zij $V = \mathbb{R}^3$ en laten $v_1 := (1, 2, -1), v_2 := (6, 4, 2) \in V$.

Laat zien dat $w_1 := (9, 2, 7)$ een lineaire combinatie van v_1 en v_2 is, maar $w_2 := (4, -1, 8)$ niet, d.w.z. $w_1 \in L(v_1, v_2)$ en $w_2 \notin L(v_1, v_2)$.

(ii) Zij V de $\mathbb{R}$-vectorruimte $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ is een afbeelding } \}$ en zij $\sin : x \mapsto \sin(x)$, $\cos : x \mapsto \cos(x) \in V$.

Is $f : x \mapsto \sin(2x)$ een lineaire combinatie van sin en cos?