

Huiswerk week 5

Opgave 17.

Zij V een $\mathbb{F}$ -vectorruimte en $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.

- (i) Stel dat $(v_1, \dots, v_n)$ lineair onafhankelijk is. Laat zien dat dan ook iedere deelverzameling van de vectoren $v_1, \dots, v_n$ een lineair onafhankelijk stelsel vormt.
- (ii) Stel dat $(v_1, \dots, v_n)$ lineair afhankelijk is. Laat zien dat dan ook iedere verzameling van vectoren in V die de vectoren $v_1, \dots, v_n$ bevat een lineair afhankelijk stelsel vormt.
- (iii) Stel dat $(v_1, \dots, v_n)$ lineair afhankelijk is. Laat zien dat er een index i is zo dat v_i een lineaire combinatie van de *voorafgaande* vectoren is, d.w.z. zodanig dat $v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1}$ voor zekere $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}$ in $\mathbb{F}$.

Opgave 18.

- (i) Zij $v := (1, 1, 1), w := (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Laat zien dat (v, w) een lineair onafhankelijk stelsel is.
Vind een vector $u \in \mathbb{R}^3$ zo dat (v, w, u) nog steeds lineair onafhankelijk is.
Laat zien dat $L(v, w, u) = \mathbb{R}^3$, d.w.z. dat (v, w, u) een basis van $\mathbb{R}^3$ is.
- (ii) Laat zien dat $((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 0), (1, 3, 3, 1))$ een basis van $\mathbb{R}^4$ is.

Opgave 19.

Zij $\mathbb{F}$ een lichaam. Een *veeltermafbeelding* van $\mathbb{F}$ naar $\mathbb{F}$ is een afbeelding van de vorm $f : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ met $a_k \in \mathbb{F}$ voor $0 \leq k \leq n$. De grootste k waarvoor $a_k \neq 0$ heet de *graad* van f , bijvoorbeeld heeft $x \mapsto x^3 + x + 1$ graad 3. Als alle $a_k = 0$ zijn, zegt men dat f graad $-\infty$ heeft (om technische redenen).

Zij p_k de veeltermafbeelding gegeven door $p_k : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, x \mapsto x^k$.

- (i) Laat zien dat

$$\text{Pol}_n(\mathbb{F}) := \{f : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} \mid f \text{ is een veeltermafbeelding van graad } \leq n\}$$

een lineaire deelruimte van de vectorruimte van alle afbeeldingen van $\mathbb{F}$ naar $\mathbb{F}$ vormt.

- (ii) Laat zien dat (p_0, p_1, p_2) voor ieder lichaam $\mathbb{F}$ een volledig stelsel voor $\text{Pol}_2(\mathbb{F})$ is, d.w.z. dat $\text{Pol}_2(\mathbb{F}) = L(p_0, p_1, p_2)$.

(iii) Ga na voor welke van de volgende lichamen (p_0, p_1, p_2) een basis van $Pol_2(\mathbb{F})$ is:

- (a) $\mathbb{F}_2$ (lichaam met 2 elementen);
- (b) $\mathbb{F}_3$ (lichaam met 3 elementen);
- (c) $\mathbb{C}$ (lichaam der reële getallen).

(Hint: Het is handig om een afbeelding op een eindige verzameling door zijn waarden aan te geven.)

Opgave 20.

Een vectorruimte V heet *eindig voortgebracht* als er vectoren $v_1, \dots, v_n \in V$ bestaan met $L(v_1, \dots, v_n) = V$.

- (i) Laat zien dat ieder eindig voortgebrachte vectorruimte een eindige basis heeft en dat zo'n basis verkregen kan worden door geschikte elementen uit het stelsel $(v_1, \dots, v_n)$ weg te laten.
- (ii) Zij $v_1 := (1, 1, 1), v_2 := (1, 2, 3), v_3 := (-1, 0, 1), v_4 := (1, 2, 1), v_5 := (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$, dan is $L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = \mathbb{R}^3$ (dit hoef je niet te bewijzen). Bepaal een basis van $\mathbb{R}^3$ die uit een deel van de vectoren v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 bestaat.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la1_08/la1.html