

Huiswerk week 6

Opgave 21.

Zij V een n -dimensionale vectorruimte over $\mathbb{F}$. Bewijs de volgende uitspraken:

- (i) Ieder lineair onafhankelijk stelsel bestaande uit precies n vectoren uit V is een basis van V .
- (ii) Ieder volledig stelsel bestaande uit precies n vectoren uit V is een basis van V .

Opgave 22.

Zij V een eindig-dimensionale $\mathbb{F}$ -vectorruimte en laten U en W lineaire deelruimten van V zijn.

- (i) Zij $(u_1, \dots, u_m)$ een volledig stelsel voor U en $(w_1, \dots, w_r)$ een volledig stelsel voor W , d.w.z. $L(u_1, \dots, u_m) = U$ en $L(w_1, \dots, w_r) = W$.
Laat zien dat $L(u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_r) = U + W$, d.w.z. $U + W$ is het opspansel van de vereniging van volledige stelsels van U en W .
- (ii) Laat zien dat $U + W$ de kleinste deelruimte van V is die $U \cup W$ bevat, d.w.z. voor iedere deelruimte T van V die U en W bevat geldt $U + W \subseteq T$.
- (iii) Zij ook X een lineaire deelruimte van V .
Bewijs dat $X \cap (U + (X \cap W)) = (X \cap U) + (X \cap W)$.
Laat door een tegenvoorbeeld zien dat in het algemeen niet geldt dat $X \cap (U + W) = (X \cap U) + (X \cap W)$.

Opgave 23.

Zij $V := \mathbb{R}^5$ en zij

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V \mid x_1 = x_3 + x_4\},$$
$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V \mid x_2 = x_3 = x_4 \text{ en } x_1 + x_5 = 0\}.$$

- (i) Bepaal de dimensies van U en W .
- (ii) Laat zien dat $U + W = V$ en geef een basis van $U \cap W$ aan.

Hoe veranderen de antwoorden in (i) en (ii) als V de vectorruimte $\mathbb{F}_2^5$ over het lichaam met twee elementen is?

Opgave 24.

Zij V een n -dimensionale vectorruimte over $\mathbb{F}$ met lineaire deelruimten U en W . Men noemt W een *complementaire* deelruimte van U in V als $U + W = V$ en $U \cap W = \{0\}$.

- (i) Laat zien dat iedere lineaire deelruimte U van V een complementaire deelruimte in V heeft.
- (ii) Bewijs dat voor een lineaire deelruimte U van V met $\dim U = m$ iedere complementaire deelruimte van U in V dimensie $n - m$ heeft.
- (iii) Zij $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, 1, 1) \in V$ en $U = L(v)$. Geef twee verschillende complementaire deelruimten van U in V aan.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la1_08/la1.html