Tentamen Lineaire Algebra 1

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!
Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan,

Opgave 1. (9 punten)
Zij $v_1 := (3, 1, -1), v_2 := (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$.

(i) Laat zien dat het stelsel (v_1, v_2) lineair onafhankelijk is.

(ii) Vind een vector $w \in \mathbb{R}^3$ die loodrecht op het vlak opgespannen door v_1 en v_2 staat en die het stelsel (v_1, v_2) tot een basis (v_1, v_2, w) van $\mathbb{R}^3$ uitbreidt.

(iii) Vind een vector $w' \in \mathbb{R}^3$ die *niet* loodrecht op het vlak opgespannen door v_1 en v_2 staat en die het stelsel (v_1, v_2) tot een basis (v_1, v_2, w') van $\mathbb{R}^3$ uitbreidt.

Opgave 2. (7 punten)
Zij $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ is differentieerbaar}\}$ de $\mathbb{R}$-vectorruimte van op $\mathbb{R}$ differentieerbare functies en noteer de afgeleide van een functie $f \in V$ met f'. Welke van de volgende deelverzamelingen van V zijn lineaire deelruimtes? Geef uitleg over je antwoorden.

(i) $U_1 := \{f \in V \mid f'(x) = \pi f(x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$.

(ii) $U_2 := \{f \in V \mid f'(x) \geq f(x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$.

(iii) $U_3 := \{f \in V \mid \text{er bestaat een } c \in \mathbb{R} \text{ met } f'(x) = cf(x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$.

[Hint: Voor $f(x) = e^{ax}$ geldt $f'(x) = af(x)$.]

z.o.z.

Opgave 3. (9 punten)

(i) Laat zien dat
$$U := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_3 = z_1 + iz_2\}$$
een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^3$ is.

(ii) Bepaal de dimensie van U en geef een basis van U aan.

(iii) Zij $U_{\mathbb{R}}$ de *reële* vectorruimte verkregen uit U door de scalaire vermenigvuldiging tot elementen $\lambda \in \mathbb{R}$ te beperken.

Wat is de dimensie van $U_{\mathbb{R}}$?

Opgave 4. (9 punten)
In $\mathbb{R}^4$ zijn de vectoren
$$v_1 := (1,0,0,1), \quad v_2 := (0,1,1,2), \quad v_3 := (1,0,1,2),$$
$$v_4 := (2,1,0,3), \quad v_5 := (1,-2,1,0), \quad v_6 := (1,2,-1,2)$$
gegeven.
Bepaal een basis van $L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$.

Opgave 5. (6 punten)
Zij V een vectorruimte en laten $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ en $w_1, w_2, \ldots, w_n \in V$ zo dat $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ en $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ lineair onafhankelijke stelsels zijn.
Stel dat $L(v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq L(w_1, w_2, \ldots, w_n)$.
Laat zien dat of $\dim V \geq n+1$ of V is een oneindig-dimensionale vectorruimte.

Opgave 6. (10 punten)
Zij V een vectorruimte met $\dim V = n$. Laten $U_1, U_2, U_3 \subset V$ lineaire deelruimten zijn met $\dim U_1 = \dim U_2 = \dim U_3 = n-1$.

(i) Laat zien dat $\dim(U_1 \cap U_2) = \begin{cases} n-2 & \text{als } U_1 \neq U_2, \\ n-1 & \text{als } U_1 = U_2. \end{cases}$

(ii) Bewijs dat $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \geq n-3$.

(iii) Geef een voorbeeld van drie *verschillende* lineaire deelruimten $U_1, U_2, U_3 \subset \mathbb{R}^3$ met $\dim U_1 = \dim U_2 = \dim U_3 = 2$ en $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = 1$.

Succes ermee!