Huiswerk week 1

Opgave 1.
Zij $f : X \to Y$ een afbeelding X naar Y. Verder zijn $A, B \subset X$ willekeurige deelverzamelingen van X. Bewijs de volgende uitspraken:

(i) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

(ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(iii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(iv) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$.

Geef expliciete tegenvoorbeelden die aantonen dat in (iii) en (iv) gelijkheid in het algemeen niet geldt.

Opgave 2.
Laten X en Y *eindige* verzamelingen zijn. Het aantal elementen van deze verzamelingen geven we met $|X|$ en $|Y|$ aan.

(i) Hoeveel verschillende afbeeldingen $f : X \to Y$ bestaan er?

(ii) Een afbeelding $f : X \to Y$ heet *injectief* als verschillende elementen van X altijd verschillende functiewaarden hebben, d.w.z. als

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Laat zien dat er voor $|X| > |Y|$ geen injectieve afbeelding van X naar Y bestaat.

Bepaal voor het geval $|X| \leq |Y|$ het aantal injectieve afbeeldingen van X naar Y.

Opgave 3.
We hebben het Cartesische product $A \times B$ gedefinieerd als de verzameling van paren (a, b) met $a \in A$ en $b \in B$.
In deze opgave gaan we na dat een equivalente definitie gegeven is door

$$A \boxtimes B := \Big\{ \{\{a\}, \{a, b\}\} \mid a \in A,\ b \in B \Big\}.$$

Kijk hiervoor na de afbeelding $f : A \times B \to A \boxtimes B, (a, b) \mapsto \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

(i) Laat zien dat $f(A \times B) = A \boxtimes B$.

(Dit betekent dat f een *surjectieve* afbeelding is, d.w.z. ieder element van $A \boxtimes B$ is het beeld van minstens één element van $A \times B$.)

(ii) Laat zien dat $\big\{\{a\},\{a,b\}\big\} = \big\{\{c\},\{c,d\}\big\}$ dan en slechts dan als $a = c$ en $b = d$ (dus als $(a,b) = (c,d)$).

(Dit betekent dat f een *injectieve* afbeelding is, d.w.z. ieder element van $A \boxtimes B$ is het beeld van hoogstens één element van $A \times B$.)

Opgave 4.
In de reële getallen gelden de volgende rekenregels:

(1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ voor alle $a,b,c \in \mathbb{R}$;

(2) $a+b = b+a$ voor alle $a,b \in \mathbb{R}$;

(3) er bestaat een element $0 \in \mathbb{R}$ met $a+0 = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}$;

(4) voor iedere $a \in \mathbb{R}$ bestaat er een element $-a \in \mathbb{R}$ met $a+(-a) = 0$;

(5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ voor alle $a,b,c \in \mathbb{R}$;

(6) $a \cdot b = b \cdot a$ voor alle $a,b \in \mathbb{R}$;

(7) er bestaat een element $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, met $a \cdot 1 = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}$;

(8) voor iedere $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ bestaat er een element $a^{-1} \in \mathbb{R}$ met $a \cdot a^{-1} = 1$;

(9) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ voor alle $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Abstract noemt men een verzameling $\mathbb{F}$ waarop twee bewerkingen

$$\begin{aligned} + :& \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, (a,b) \mapsto a+b \text{ (optelling)} \\ \cdot :& \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, (a,b) \mapsto a \cdot b \text{ (vermenigvuldiging)} \end{aligned}$$

gedefinieerd zijn, die aan de regels (1) t/m (9) voldoen een *lichaam*.

(i) Laat zien dat uit de rekenregels volgt dat $a \cdot 0 = 0$ voor alle a in een lichaam $\mathbb{F}$.

(ii) Op de verzameling $\mathbb{F}_2 := \{0,1\}$ definiëren we een optelling en vermenigvuldiging als volgt:

$$\begin{aligned} &0+0 = 0, \quad 0+1 = 1, \quad 1+0 = 1, \quad 1+1 = 0 \\ &0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Laat zien dat $\mathbb{F}_2$ met deze bewerkingen een lichaam is waarbij 0 en 1 de rollen uit de rekenregels (3) en (7) hebben.

(iii) Definieer op de verzameling $\mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ een optelling en vermenigvuldiging zo dat $\mathbb{F}_3$ met deze bewerkingen een lichaam wordt. Laat hierbij de elementen 0 en 1 de rollen uit de rekenregels (3) en (7) hebben.

Om het schrijfwerk te beperken, mag je de regels (1) en (5) buiten beschouwing laten.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la1_09/la1.html