Huiswerk week 2

Opgave 5.
Zij V een (reële) vectorruimte, $x, y, z \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Bewijs vanuit de axioma's in de definitie van een vectorruimte:

(i) $\lambda \cdot 0 = 0$ (waarbij 0 de nulvector in V is).

(ii) Als $x + y = x + z$, dan is $y = z$.

(iii) Als $\lambda \cdot x = 0$, dan is $\lambda = 0$ of $x = 0$.

Opgave 6.
Zij V een vectorruimte en laten U, W lineaire deelruimten van V zijn.

(i) Laat zien dat $U \cap W$ ook een lineaire deelruimte van V is.

(ii) Laat zien dat $U \cup W$ alleen maar een lineaire deelruimte van V is als $U \subset W$ of $W \subset U$.

(iii) Bewijs dat $U \setminus W$ nooit een lineaire deelruimte van V is.

Opgave 7.
Zij $F_{\mathbb{R}} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ is een afbeelding}\}$ de vectorruimte van reële functies van $\mathbb{R}$.

(i) Voor welke $c \in \mathbb{R}$ is $U_c := \{f \in F_{\mathbb{R}} \mid f(0) = c\}$ een lineaire deelruimte van $F_{\mathbb{R}}$?

(ii) Laat zien dat $P_{2\pi} := \{f \in F_{\mathbb{R}} \mid f(x) = f(x + 2\pi) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$ een lineaire deelruimte van $F_{\mathbb{R}}$ is.
Opmerking: $P_{2\pi}$ heet de ruimte der 2π-periodieke functies.

(iii) Een functie f heet *monotoon stijgend* als voor alle $x, x' \in \mathbb{R}$ met $x' \geq x$ geldt dat $f(x') \geq f(x)$, f heet *monotoon dalend* als voor alle $x, x' \in \mathbb{R}$ met $x' \geq x$ geldt dat $f(x') \leq f(x)$.

We definiëren de volgende deelverzamelingen van $F_{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned} U_{ms} &:= \{f \in F_{\mathbb{R}} \mid f \text{ is monotoon stijgend}\}, \\ U_{md} &:= \{f \in F_{\mathbb{R}} \mid f \text{ is monotoon dalend}\}, \\ U_{mon} &:= U_s \cup U_d. \end{aligned}$$

Geef aan welke van U_s, U_d en U_{mon} lineaire deelruimten van $F_{\mathbb{R}}$ zijn.

Opgave 8.
Een afbeelding $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ van de niet-negatieve gehele getallen naar de reële getallen wordt meestal als oneindige rij $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ geschreven, waarbij $a_i = f(i)$, d.w.z. door de beelden van $0, 1, 2, \ldots$ achter elkaar in een rij te plaatsen.
Men gaat eenvoudig na (maar dat is hier niet gevraagd) dat de verzameling

$$R := \{(a_0, a_1, a_2, \ldots) \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ voor alle } i \geq 0\}$$

van oneindige rijen met componentsgewijs optellen en scalair vermenigvuldigen, d.w.z. met

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots) \text{ en}$$
$$\lambda(a_0, a_1, a_2, \ldots) := (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \ldots) \text{ voor } \lambda \in \mathbb{R}$$

een reële vectorruimte vormt. Merk op dat deze definitie van de optelling en scalaire vermenigvuldiging volstrekt analoog met de definities voor n-tupels en functies uit het college is.

(i) Zij $P := \{(a_0, a_1, a_2, \ldots) \in R \mid \text{er bestaat een } n \in \mathbb{N} \text{ zo dat } a_i = 0 \text{ voor alle } i > n\}$ de verzameling van rijen die na een eindig beginstuk constant 0 zijn, dus van rijen van de vorm $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$.

Laat zien dat P een lineaire deelruimte van R is.

(ii) Zij $F := \{(a_0, a_1, a_2, \ldots) \in R \mid a_{i+2} = a_{i+1} + a_i \text{ voor alle } i \geq 0\}$ de verzameling van *veralgemeende Fibonacci-rijen*.

Laat zien dat F een lineaire deelruimte van R is.

Opmerking: De elementen van P (in deel (i)) laten zich ook als *veeltermen* interpreteren door de rij $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ met de veelterm $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ te identificeren.

Oefenopgaven week 2

Opgave I
Zij $V := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ de verzameling van paren van reële getallen.
Ga na of V met de hieronder gedefinieerde bewerkingen (optelling en scalaire vermenigvuldiging) een vectorruimte vormt. Licht je antwoorden toe.

(i) Definieer op V optelling en scalaire vermenigvuldiging door

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 y_2) \quad \text{en} \quad \lambda(x, y) := (\lambda x, y).$$

(ii) Definieer op V optelling en scalaire vermenigvuldiging door

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{en} \quad \lambda(x, y) := (x, 0).$$

(iii) Definieer op V optelling en scalaire vermenigvuldiging door

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + 2x_2, y_1 + 3y_2) \quad \text{en} \quad \lambda(x, y) := (\lambda x, \lambda y).$$

(iv) Definieer op V optelling en scalaire vermenigvuldiging door

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ en } \lambda(x, y) := \begin{cases} (0, 0) & \text{als } \lambda = 0 \\ (\lambda x, \frac{y}{\lambda}) & \text{als } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Opgave II
Ga na of de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$ met de gebruikelijke bewerkingen op $\mathbb{R}^3$ lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^3$ vormen. Licht je antwoorden toe.

(i) $U_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3y \text{ en } z = -y\}$

(ii) $U_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z + 2\}$

(iii) $U_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 7y + z = 0\}$

(iv) $U_4 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y - z = 0\}$

(v) $U_5 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 1\}$

(vi) $U_6 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x^2 - 3y^2 + 6z^2 = 0\}$

Opgave III
Zij $F_e := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ slechts voor eindig veel elementen } x \in S\}$ de verzameling van reële functies die bijna overal nul zijn.
Laat zien dat F_e een lineaire deelruimte van de vectorruimte $F_{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ van alle reële functies is.

Opgave IV
Zij $R := \{(a_0, a_1, a_2, \ldots) \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ voor alle } i \geq 0\}$ de vectorruimte van oneindige rijen.
Laat zien dat de deelverzameling $C \subset R$ van *convergente rijen* een lineaire deelruimte van R vormt.
(Een rij $(a_0, a_1, a_2, \ldots) \in R$ ligt in C als er een $a \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $n \in \mathbb{N}$ is met $|a_m - a| < \varepsilon$ voor alle $m > n$.)

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la1_09/la1.html