Huiswerk week 3

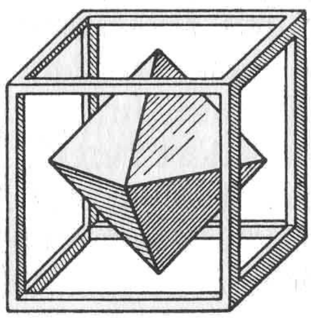
Opgave 9.
Een *octaëder* is een regelmatig veelvlak begrensd door 8 gelijkzijdige driehoeken. De coördinaten van de zes hoekpunten van een bepaalde octaëder met het punt $(0,0,0)$ als middelpunt zijn

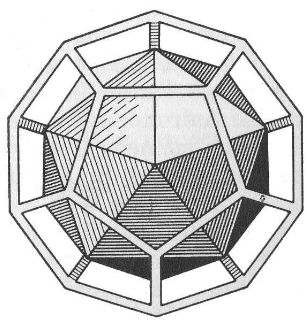
$$(\pm 1, 0, 0), \quad (0, \pm 1, 0), \quad (0, 0, \pm 1).$$

Een *icosaëder* is een regelmatig veelvlak begrensd door 20 gelijkzijdige driehoeken. De coördinaten van de twaalf hoekpunten van een bepaalde icosaëder met het punt $(0,0,0)$ als middelpunt zijn

$$(0, \pm\tau, \pm 1), \quad (\pm 1, 0, \pm\tau), \quad (\pm\tau, \pm 1, 0).$$

waarbij $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034$.





(i) Laten P en Q twee naburige hoekpunten van de octaëder zijn, d.w.z. twee punten die door een kant verbonden zijn. Bepaal de hoek tussen de verbindingen van P en Q met het middelpunt $(0,0,0)$.

(ii) Laten P en Q twee naburige hoekpunten van de icosaëder zijn. Bepaal de hoek tussen de verbindingen van P en Q met het middelpunt $(0,0,0)$.

(iii) Bepaal de diëderhoek van de octaëder, d.w.z. de hoek tussen twee zijvlakken die een kant gemeenschappelijk hebben.

(iv) Bepaal de diëderhoek van de icosaëder.

Merk op dat de hoeken niet van de keuze van de hoekpunten P en Q (in delen (i) en (ii)) en van de keuze van de zijvlakken (in delen (iii) en (iv)) afhangen (als deze maar naburig zijn), omdat de octaëder en icosaëder *regelmatig* zijn.

Opgave 10.
Laten $p_1 := (1, 1, 2)$, $p_2 := (0, -1, 3)$, $v_1 := (2, 0, 1)$, $v_2 := (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.
Dan is $L_1 := \{p_1 + \lambda v_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ een lijn in $\mathbb{R}^3$, namelijk de lineaire deelruimte $U_1 = \{\lambda v_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ verschoven om de vector p_1.
Net zo is $L_2 := \{p_2 + \mu v_2 \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ een lijn in $\mathbb{R}^3$.
Bepaal de kleinste afstand die de lijnen L_1 en L_2 hebben, d.w.z. het minimum van $\|q_1 - q_2\|$ waarbij $q_1 \in L_1$ en $q_2 \in L_2$.
(Hint: Het minimum wordt bereikt als de verbindingsvector $q_1 - q_2$ loodrecht op beide lijnen staat.)

Opgave 11.
Zij $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Met $v \cdot w$ noteren we het inproduct en met $v \times w$ het uitproduct op $\mathbb{R}^3$.

(i) Laat zien dat $(u \times v) \cdot w = (v \times w) \cdot u = (w \times u) \cdot v$.

(ii) Bewijs dat
$$(v \cdot w)^2 + \|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \, \|w\|^2.$$
Concludeer dat
$$\|v \times w\| = \|v\| \, \|w\| \, \sin \alpha$$
waarbij α de hoek tussen v en w is.

Oefenopgaven week 3

Opgave V
Zij V een reële vectorruimte en $U \subset V$ een lineaire deelruimte. Zij $u_1, \ldots, u_n \in U$ en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
Laat zien dat dan $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n \in U$.

Opgave VI
De vijf Platonische lichamen laten zich als volgt realiseren:

Tetraëder hoekpunten $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(1, -1, -1)$ (vgl. college).

Kubus hoekpunten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

Octaëder hoekpunten $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$ (vgl. Opgave 9).

Dodecaëder hoekpunten $(0, \pm\frac{1}{\tau}, \pm\tau)$, $(\pm\tau, 0, \pm\frac{1}{\tau})$, $(\pm\frac{1}{\tau}, \pm\tau, 0)$, $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, waarbij $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618034$.

Icosaëder hoekpunten $(0, \pm\tau, \pm 1)$, $(\pm 1, 0, \pm\tau)$, $(\pm\tau, \pm 1, 0)$ (vgl. Opgave 9).

Bepaal voor ieder van de Platonische lichamen de straal van de grootste bol die binnen het lichaam past (en dus de middelpunten van de zijvlakken raakt), de straal van de kleinste bol die het lichaam bevat (en dus de hoekpunten bevat) en de verhouding van deze twee stralen.

Opmerking: Gebaseerd op deze verhoudingen heeft Johannes Kepler zijn beroemd model van de planetenbanen ontworpen, waarbij de Platonische lichamen in elkaar geschakeld zijn. Hierbij ligt het *aphelium* (de grootste afstand die een planeet van de zon heeft) van een planeet op een bol die binnen een lichaam ligt en het *perihelium* (de kleinste afstand die de planeet van de zon heeft) op een bol die het naastvolgende kleinere lichaam bevat. In de tijden van Kepler waren slechts de zes planeten t/m Saturnus bekend, dus kwam dit mooi uit met de vijf Platonische lichamen.

Opgave VII
Zij $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Met $v \cdot w$ noteren we het inproduct en met $v \times w$ het uitproduct op $\mathbb{R}^3$.

(i) Laat zien dat $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$.

(ii) Laat zien dat $u \times (v \times w) = (u \cdot w) \cdot v - (u \cdot v) \cdot w$.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la1_09/la1.html