Huiswerk week 4

Opgave 12.

(i) Zij $v_1 := (1, 2, -1), v_2 := (6, 4, 2) \in \mathbb{R}^3$.

Laat zien dat $w_1 := (9, 2, 7)$ een lineaire combinatie van v_1 en v_2 is, maar $w_2 := (4, -1, 8)$ niet, d.w.z. $w_1 \in L(v_1, v_2)$ en $w_2 \notin L(v_1, v_2)$.

(ii) Zij $F_\mathbb{R}$ de reële vectorruimte $F_\mathbb{R} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ is een afbeelding }\}$ en zij $\sin : x \mapsto \sin(x)$, $\cos : x \mapsto \cos(x) \in F_\mathbb{R}$.

Is $f : x \mapsto \sin(2x)$ een lineaire combinatie van sin en cos?

Opgave 13.
Zij V een reële vectorruimte en $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$.

(i) Stel dat $(v_1, \ldots, v_n)$ een lineair onafhankelijk stelsel is. Laat zien dat dan ook iedere deelverzameling van de vectoren $v_1, \ldots, v_n$ een lineair onafhankelijk stelsel oplevert.

(ii) Stel dat $(v_1, \ldots, v_n)$ lineair afhankelijk is. Laat zien dat dan ook iedere verzameling van vectoren in V die de vectoren $v_1, \ldots, v_n$ bevat een lineair afhankelijk stelsel oplevert.

(iii) Stel dat $(v_1, \ldots, v_n)$ lineair afhankelijk is. Laat zien dat er een index i is zo dat v_i een lineaire combinatie van de *voorafgaande* vectoren is, d.w.z. zodanig dat $v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1}$ voor zekere $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}$ in $\mathbb{R}$.

Opgave 14.

(i) Zij $v := (1, 1, 1), w := (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Laat zien dat (v, w) een lineair onafhankelijk stelsel is.

(b) Vind een vector $u \in \mathbb{R}^3$ zo dat (v, w, u) nog steeds lineair onafhankelijk is.

(c) Laat zien dat $L(v, w, u) = \mathbb{R}^3$, d.w.z. dat (v, w, u) een basis van $\mathbb{R}^3$ is.

(ii) Laat zien dat $((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 0), (1, 3, 3, 1))$ een basis van $\mathbb{R}^4$ is.

Oefenopgaven week 4

Opgave VIII

(i) Zij V een reële vectorruimte en $v, w \in V$.

Laat zien dat (v, w) lineair afhankelijk is d.e.s.d.a. $v = \lambda w$ of $w = \lambda v$ voor een $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Geef een voorbeeld van drie vectoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ zo dat (v_1, v_2, v_3) lineair afhankelijk is, maar geen van de v_i een scalair veelvoud van een van de andere v_j is.

Opgave IX
Zij $f : x \mapsto e^{ax}$, $g : x \mapsto e^{bx} \in F_{\mathbb{R}}$.
Laat zien dat (f, g) een lineair onafhankelijk stelsel is d.e.s.d.a. $a \neq b$.

Opgave X
Zij $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$, dan is V een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$ (dit hoef je niet te bewijzen).
Vind een basis van V, d.w.z. een lineair onafhankelijk stelsel $(v_1, \ldots, v_m)$ met $v_1, \ldots, v_m \in V$ en $L(v_1, \ldots, v_m) = V$.

Opgave XI
Zij $v_1 = (0, 2, 1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 1, 0)$, $v_3 = (2, 1, 0, -2) \in \mathbb{R}^4$.
Ga na of de vector $w = (2, 0, -4, -2)$ in het opspansel $L(v_1, v_2, v_3)$ van v_1, v_2, v_3 ligt.

Opgave XII
Zij V een vectorruimte en zij $v, w \in V$ zo dat (v, w) een basis van V is. Stel dat $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \neq 0$.
Laat zien dat in dit geval $(v + w, \lambda v)$ en $(\lambda v, \mu w)$ ook bases van V zijn.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la1_09/la1.html