Huiswerk week 5

Opgave 15.
Een vectorruimte V heet *eindig voortgebracht* als er vectoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ bestaan met $L(v_1, \ldots, v_n) = V$.

(i) Laat zien dat ieder eindig voortgebrachte vectorruimte een eindige basis heeft en dat zo'n basis verkregen kan worden door geschikte elementen uit het stelsel $(v_1, \ldots, v_n)$ weg te laten.

(ii) Zij $v_1 := (1, 1, 1), v_2 := (1, 2, 3), v_3 := (-1, 0, 1), v_4 := (1, 2, 1), v_5 := (2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$, dan is $L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = \mathbb{R}^3$ (dit hoef je niet te bewijzen).

Bepaal een basis van $\mathbb{R}^3$ die uit een deel van de vectoren v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 bestaat.

Opgave 16.
Vind bases voor de volgende lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^4$:

(i) $U_1 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$;

(ii) $$U_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &=& 0 \\ \text{en } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &=& 0\}; \end{array}$$

(iii) $$U_3 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &=& 0 \\ \text{en } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &=& 0 \\ \text{en } x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 &=& 0\}; \end{array}$$

(iv) $$U_4 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &=& 0 \\ \text{en } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &=& 0 \\ \text{en } x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 &=& 0\}. \end{array}$$

Opgave 17.
Zij $C^2_{\mathbb{R}} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ is minstens twee keer differentieerbaar$\}$. Met f' en f'' noteren we de eerste en tweede afgeleide van de functie $f \in C^2_{\mathbb{R}}$.
Bepaal bases voor de volgende lineaire deelruimten van $C^2_{\mathbb{R}}$:

(i) $U_1 := \{f \in C^2_{\mathbb{R}} \mid f' = 0\}$;

(ii) $U_2 := \{f \in C^2_{\mathbb{R}} \mid f' + cf = 0\}$, waarbij $0 \neq c \in \mathbb{R}$;

(iii) $U_3 := \{f \in C^2_{\mathbb{R}} \mid f'' = 0\}$;

(iv) $U_4 := \{f \in C^2_{\mathbb{R}} \mid f'' + f = 0\}$.

(Hint deel (ii): Voor $g : x \mapsto e^{-x}$ geldt $g + g' = 0$.
Hint deel (iv): Voor $\sin : x \mapsto \sin(x)$ geldt $\sin + \sin'' = 0$ Verder geldt altijd $((f')^2 + f^2)' = 2f'(f'' + f)$.)

Oefenopgaven week 5

Opgave XIII
Zij $v \in \mathbb{R}^n$ een lineaire combinatie van de vectoren $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$. Stel dat v_i voor iedere $i \in \{1, \ldots, r\}$ een lineaire combinatie van de vectoren $w_1, \ldots, w_s \in \mathbb{R}^n$ is.
Laat zien dat v een lineaire combinatie van de vectoren $w_1, \ldots, w_s$ is.

Opgave XIV
Zij V een vectorruimte en $u, v, w \in V$.
Laat zien: (u, v, w) is een basis voor V dan en slechts dan als $(u+v+w, v+w, w)$ een basis voor V is.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la1_09/la1.html