Huiswerk week 6

Opgave 18.
Zij V een n-dimensionale reële vectorruimte. Bewijs de volgende uitspraken:

(i) Ieder lineair onafhankelijk stelsel bestaande uit precies n vectoren uit V is een basis van V.

(ii) Ieder volledig stelsel bestaande uit precies n vectoren uit V is een basis van V.

Opgave 19.
Zij $V := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$.

(i) Bepaal een basis B_1 van V die de vector $v_0 = (1, 1, 1, 1, -4)$ bevat.

(ii) Bepaal een basis B_2 van V die de vectoren $v_1 = (1, -1, 1, -1, 0)$ en $v_2 = (0, 1, -1, 1, -1)$ bevat.

(iii) Geef een reeks van bases voor V die met je basis B_1 uit deel (i) begint en met je basis B_2 uit deel (ii) eindigt, waarbij je in iedere stap één van de vectoren uit de basis B_1 door een vector uit de basis B_2 vervangt.

Opgave 20.
Zij V een reële vectorruimte. Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(i) V is oneindig dimensionaal.

(ii) Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ bevat V een lineair onafhankelijk stelsel $(v_1, \dots, v_n)$.

(iii) V bevat een oneindig lineair onafhankelijk stelsel.

Merk op: Een oneindig stelsel vectoren heet lineair onafhankelijk als het geen *eindig* lineair afhankelijk stelsel bevat, d.w.z. als de nulvector niet als niet-triviale eindige lineaire combinatie van vectoren uit het stelsel te schrijven is.

Oefenopgaven week 6

Opgave XV
Bewijs dat de vectorruimte $F_{[0,1],c} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continu}\}$ van continue functies op het interval $[0, 1]$ een oneindig-dimensionale vectorruimte is.

Opgave XVI
Zij V een n-dimensionale reële vectorruimte.

(i) Zij $v_1, \ldots, v_r \in V$ zo dat $(v_1, \ldots, v_r)$ een lineair onafhankelijk stelsel is. Laat zien dat $r \leq n$.

(ii) Zij $v_1, \ldots, v_r \in V$ met $r > n$. Laat zien dat $(v_1, \ldots, v_r)$ lineair afhankelijk is.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la1_09/la1.html