Huiswerk week 7

Opgave 21.
Zij $V := \mathbb{R}^5$ en zij

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V \mid x_1 = x_3 + x_4\},$$
$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in V \mid x_2 = x_3 = x_4 \text{ en } x_1 + x_5 = 0\}.$$

(i) Bepaal de dimensies van U en W.

(ii) Laat zien dat $U + W = V$ en geef een basis van $U \cap W$ aan.

Opgave 22.
Zij V een n-dimensionale vectorruimte met lineaire deelruimten U en W. Men noemt W een *complementaire* deelruimte van U in V als

$$U + W = V \text{ en } U \cap W = \{0\}.$$

(i) Laat zien dat iedere lineaire deelruimte U van V een complementaire deelruimte in V heeft.

(ii) Zij U een lineaire deelruimte van V met $\dim U = m$. Bewijs dat iedere complementaire deelruimte van U in V dimensie $n - m$ heeft.

(iii) Zij $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1, 1, 1) \in V$ en $U = L(v)$. Geef twee *verschillende* complementaire deelruimten van U in V aan.

Opgave 23.
Zij $V := \mathbb{C}^2$ de complexe vectorruimte van paren complexe getallen, d.w.z. $V := \{(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$.
Voor $z = x + yi \in \mathbb{C}$ met $x, y \in \mathbb{R}$ noteren we met $\overline{z}$ de complex geconjugeerde $\overline{z} := x - yi$ van z.
Zij $U := \{(z, i \cdot z) \mid z \in \mathbb{C}\} \subset V$ en $W := \{(z, \overline{z}) \mid z \in \mathbb{C}\} \subset V$.

(i) Zijn U en W lineaire deelruimten van V? Geef een bewijs of een tegenargument.

(ii) Door de scalaire vermenigvuldiging tot factoren in $\mathbb{R}$ te beperken wordt V een *reële* vectorruimte die we voor de duidelijkheid met $V_{\mathbb{R}}$ noteren. Zijn de verzamelingen U en W lineaire deelruimten van $V_{\mathbb{R}}$?

Oefenopgaven week 7

Opgave XVII
Zij V een reële vectorruimte en laten U en W eindig-dimensionale lineaire deelruimten van V zijn.

(i) Zij $(u_1, \ldots, u_m)$ een volledig stelsel voor U en $(w_1, \ldots, w_r)$ een volledig stelsel voor W, d.w.z. $L(u_1, \ldots, u_m) = U$ en $L(w_1, \ldots, w_r) = W$.
Laat zien dat $L(u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_r) = U + W$, d.w.z. de vereniging van volledige stelsels van U en W is een volledig stelsel voor $U + W$.

(ii) Stel dat $\dim U = m$ en $\dim W = r$.
Laat zien dat $\dim(U + W) \leq m + r$ en $\dim(U \cap W) \leq \min(m, r)$.

(iii) Zij ook X een lineaire deelruimte van V.
Bewijs dat $X \cap (U + (X \cap W)) = (X \cap U) + (X \cap W)$.
Laat door een tegenvoorbeeld zien dat in het algemeen niet geldt dat $X \cap (U + W) = (X \cap U) + (X \cap W)$.

Opgave XVIII

(i) Geef een expliciet voorbeeld van lineaire deelruimten U en W van $\mathbb{R}^3$ met $\dim U > \dim W > 0$ en $\dim(U \cap W) = \dim W$.

(ii) Geef een expliciet voorbeeld van lineaire deelruimten U en W van $\mathbb{R}^3$ met $\dim U > \dim W > 0$ en $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

(iii) Geef een expliciet voorbeeld van lineaire deelruimten U en W van $\mathbb{R}^3$ met $\dim U \geq \dim W$ zo dat $\dim(U \cap W) < \dim W$ en $\dim(U + W) < \dim U + \dim W$.

Opgave XIX
Zij

$$v_1 = (2, 1, 0, -1, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1, 0, 2), \quad v_3 = (0, 3, 2, -1, 1),$$
$$v_4 = (1, -1, -2, -1, 2), \quad v_5 = (3, 0, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^5$$

en zij

$$U := L(v_1, v_2, v_3), \qquad W := L(v_3, v_4, v_5).$$

Bepaal $\dim U$, $\dim W$, $\dim(U + W)$ and $\dim(U \cap W)$.
Probeer ook een basis van $U \cap W$ te vinden.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/∼souvi/la1_09/la1.html