Tentamen Lineaire Algebra 1

Maak iedere opgave op een apart blad. Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer.
Lees eerst de opgaven voordat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!
Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan,

Opgave 1. (8 punten)
Zij $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ is differentieerbaar}\}$ de reële vectorruimte van op $\mathbb{R}$ differentieerbare functies en noteer de afgeleide van een functie $f \in V$ met f'. Welke van de volgende deelverzamelingen van V zijn lineaire deelruimtes? Geef uitleg over je antwoorden.

(i) $U_1 := \{f \in V \mid f'(x) \geq 0 \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$.

(ii) $U_2 := \{f \in V \mid \text{er bestaat een } c \in \mathbb{R} \text{ met } f'(x) = cx \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$.

(iii) $U_3 := \{f \in V \mid \text{er bestaat een } c \in \mathbb{R} \text{ met } f'(x) = cf(x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$.

[Hint: Voor $f(x) = e^{ax}$ geldt $f'(x) = af(x)$.]

Opgave 2. (8 punten)
Van de bouwplan van een kubus hebben de muizen slechts nog een fragment overgelaten. Je kunt nog herkennen dat twee door een kant verbonden hoekpunten van de voorzijde de coördinaten $(1, 1, 1)$ en $(2, 1, 0)$ hebben. Een derde hoekpunt van de voorzijde heeft coördinaten $(0, *, @)$, d.w.z. de x-coördinaat is 0, maar de y- en z-coördinaten zijn onleesbaar. De coördinaten van het vierde hoekpunt van de voorzijde zijn zoek.

(i) Bepaal de coördinaten van de vier hoekpunten van de voorzijde.

(ii) Je kunt je nog herinneren dat de oorsprong $(0, 0, 0)$ ergens op de rand van de kubus moet liggen.

Bepaal met behulp van deze informatie ook de coördinaten van de vier hoekpunten van de achterzijde van de kubus.

z.o.z.

Opgave 3. (8 punten)
In $\mathbb{R}^4$ zijn de vijf vectoren

$$v_1 := (1,0,0,1), \quad v_2 := (2,0,1,1), \quad v_3 := (1,-1,1,1),$$
$$v_4 := (2,-1,0,3), \quad v_5 := (0,-2,1,1)$$

gegeven.
Bepaal een deelverzameling van de vectoren $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ die een basis van $L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ vormt.

Opgave 4. (7 punten)
Zij V een vectorruimte, zij $n \geq 2$ en laten $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ waarbij $v_i \neq 0$ voor alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Stel dat $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ een lineair afhankelijk stelsel is.
Laat zien dat er minstens twee indices $i \in \{1, \ldots, n\}$ zijn zo dat v_i een lineaire combinatie van de andere $n-1$ vectoren uit het stelsel is.

Opgave 5. (10 punten)
In $\mathbb{R}^4$ zijn de volgende twee lineaire deelruimten U en W gegeven:

$$U := \{(x,y,z,w) \mid y - 2z + w = 0\}, \quad W := \{(x,y,z,w) \mid x = w \text{ en } y = 2z\}.$$

(i) Bepaal $\dim U$, $\dim W$, $\dim(U+W)$ en $\dim(U \cap W)$.

(ii) Geef bases voor U, W, $U+W$ en $U \cap W$ aan.

(iii) Is er een deelverzameling $X \subset \mathbb{R}^4$ met $X \subset U$ en $W \subset X$? Geef uitleg over je antwoord.

Opgave 6. (9 punten)
Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte en U een lineaire deelruimte van V. Dan heet $\operatorname{codim} U := \dim V - \dim U$ de *codimensie* van U (in V). Bijvoorbeeld heeft een 3-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^4$ codimensie 1.

(i) Laten U en W lineaire deelruimten van V zijn. Bewijs de *codimensiestelling*:

$$\operatorname{codim} U + \operatorname{codim} W = \operatorname{codim}(U+W) + \operatorname{codim}(U \cap W).$$

(ii) Stel dat U en W lineaire deelruimten van V zijn met $U + W = V$.

Bewijs of weerleg de volgende uitspraken:

(a) $\dim U + \dim W = \dim(U \cap W)$;
(b) $\dim U + \dim W = \operatorname{codim}(U \cap W)$;
(c) $\operatorname{codim} U + \operatorname{codim} W = \operatorname{codim}(U \cap W)$.

Succes ermee!