Tentamen Lineaire Algebra 1

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!
Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan,

Opgave 1. (9 punten)
Zij $v_1 := (3, 1, -1), v_2 := (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$.

(i) Laat zien dat het stelsel (v_1, v_2) lineair onafhankelijk is.

(ii) Vind een vector $w \in \mathbb{R}^3$ die loodrecht op het vlak opgespannen door v_1 en v_2 staat en die het stelsel (v_1, v_2) tot een basis (v_1, v_2, w) van $\mathbb{R}^3$ uitbreidt.

(iii) Vind een vector $w' \in \mathbb{R}^3$ die *niet* loodrecht op het vlak opgespannen door v_1 en v_2 staat en die het stelsel (v_1, v_2) tot een basis (v_1, v_2, w') van $\mathbb{R}^3$ uitbreidt.

Oplossing:

(i) Uit $v_2 = \lambda v_1$ volgt (tweede component) $\lambda = 0$, maar dit werkt niet voor de andere twee componenten, dus is v_2 geen lineair veelvoud van v_1.

(ii) Zij $w = (x, y, z)$. Uit $\langle v_2, w\rangle = 0$ volgt $x = z$ en uit $\langle v_1, w\rangle = 0$ volgt dan $y = -2x$. Dus staat bijvoorbeeld $w = (1, -2, 1)$ loodrecht op het vlak. Omdat w loodrecht op het vlak staat, ligt w niet in het vlak en is dus geen lineaire combinatie van v_1 en v_2. Dus is het stelsel (v_1, v_2, w) lineair onafhankelijk en dus een basis van $\mathbb{R}^3$.

(iii) De vector $w' = (0, 0, 1)$ staat niet loodrecht op het vlak, want $\langle v_1, w'\rangle = -1$. Uit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \mu w' = 0$ volgt rechtstreeks dat $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu = 0$, dus is het stelsel (v_1, v_2, w') lineair onafhankelijk en dus een basis van $\mathbb{R}^3$.

Opgave 2. (7 punten)
Zij $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ is differentieerbaar}\}$ de $\mathbb{R}$-vectorruimte van op $\mathbb{R}$ differentieerbare functies en noteer de afgeleide van een functie $f \in V$ met f'. Welke van de volgende deelverzamelingen van V zijn lineaire deelruimtes? Geef uitleg over je antwoorden.

(i) $U_1 := \{f \in V \mid f'(x) = \pi f(x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$.

(ii) $U_2 := \{f \in V \mid f'(x) \geq f(x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$.

(iii) $U_3 := \{f \in V \mid \text{er bestaat een } c \in \mathbb{R} \text{ met } f'(x) = cf(x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$.

[Hint: Voor $f(x) = e^{ax}$ geldt $f'(x) = af(x)$.]

Oplossing:

(i) U_1 is een lineaire deelruimte: Optelling: $f, g \in U_1 \Rightarrow (f+g)' = f' + g' = \pi f + \pi g = \pi(f+g)$, dus is $f + g \in U_1$. Scalaire vermenigvuldiging: $f \in U_1, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda \pi f = \pi(\lambda f)$ dus is $\lambda f \in U_1$. U_1 is niet leeg omdat de nulfunctie in U_1 ligt.

(ii) De constante functie $f(x) = -1$ ligt in U_2, want $f'(x) = 0 > -1$. Maar $(-1) \cdot f(x) \notin U_2$, want $0 < 1$. Dus is U_2 niet afgesloten t.o.v. scalaire vermenigvuldiging.

(iii) De functies $f(x) = e^x$ en $g(x) = e^{2x}$ liggen in U_3, maar $f(x)+g(x)$ niet. Er geldt namelijk $(f+g)(0) = 2$ en $(f'+g')(0) = 3$, dus zou $a = \frac{3}{2}$ moeten zijn. Maar $(f+g)(1) = e+e^2$ en $(f'+g')(1) = e+2e^2$, maar $\frac{2}{3}(e+2e^2) \neq (e+e^2)$. Dus is U_3 niet afgesloten t.o.v. optelling.

Opgave 3. (9 punten)

(i) Laat zien dat
$$U := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_3 = z_1 + iz_2\}$$
een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^3$ is.

(ii) Bepaal de dimensie van U en geef een basis van U aan.

(iii) Zij $U_{\mathbb{R}}$ de *reële* vectorruimte verkregen uit U door de scalaire vermenigvuldiging tot elementen $\lambda \in \mathbb{R}$ te beperken.

Wat is de dimensie van $U_{\mathbb{R}}$?

Oplossing:

(i) De nulvector $(0,0,0)$ ligt in U. Zij $v = (z_1, z_2, z_3)$ en $w = (w_1, w_2, w_3)$ in U. Dan is $v+w = (z_1+w_1, z_2+w_2, z_3+w_3)$ en $z_3+w_3 = z_1+iz_2+w_1+iw_2 = (z_1+w_1)+i(z_2+w_2)$, dus ligt $v+w$ in U. Voor $\lambda \in \mathbb{C}$ is $\lambda v = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3)$ en er geldt $\lambda z_3 = \lambda(z_1 + iz_2) = \lambda z_1 + i\lambda z_2$, dus ligt λv in U.

(ii) De dimensie van U is hoogstens 2, omdat $(1,0,0) \notin U$. De vectoren $v_1 = (1,0,1)$ en $v_2 = (0,1,i)$ liggen in U en zijn lineair onafhankelijk, dus is $\dim U = 2$ en (v_1, v_2) is een basis van U.

(iii) De dimensie van $U_{\mathbb{R}}$ is $2 \cdot \dim U = 4$, een basis is (v_1, iv_1, v_2, iv_2).

Opgave 4. (9 punten)
In $\mathbb{R}^4$ zijn de vectoren

$$v_1 := (1, 0, 0, 1), \quad v_2 := (0, 1, 1, 2), \quad v_3 := (1, 0, 1, 2),$$
$$v_4 := (2, 1, 0, 3), \quad v_5 := (1, -2, 1, 0), \quad v_6 := (1, 2, -1, 2)$$

gegeven.
Bepaal een basis van $L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$.

Oplossing: Men ziet makkelijk in dat (v_1, v_2, v_3) lineair onafhankelijk zijn, dus is $\dim L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ gelijk aan 3 of 4. In het eerste geval moet ieder van v_4, v_5, v_6 een lineaire combinatie van v_1, v_2, v_3 zijn. Er geldt $v_4 = 3v_1 + v_2 - v_3$, $v_5 = -2v_1 - 2v_2 + 3v_3$, $v_6 = 4v_1 + 2v_2 - 3v_3$, dus is (v_1, v_2, v_3) een basis van $L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$.

Opgave 5. (6 punten)
Zij V een vectorruimte en laten $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ en $w_1, w_2, \ldots, w_n \in V$ zo dat $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ en $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ lineair onafhankelijke stelsels zijn.
Stel dat $L(v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq L(w_1, w_2, \ldots, w_n)$.
Laat zien dat of $\dim V \geq n + 1$ of V is een oneindig-dimensionale vectorruimte.

Oplossing: Omdat $L(v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq L(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ is er een w_i met $w_i \notin L(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Dan is $(v_1, v_2, \ldots, v_n, w_i)$ lineair onafhankelijk. Voor $U := L(v_1, v_2, \ldots, v_n, w_i)$ geldt dus $U \subset V$ en $\dim U = n+1$. Als V eindig-dimensionaal is, is $\dim V \geq \dim U = n + 1$, anders is V oneindig-dimensionaal.

Opgave 6. (10 punten)
Zij V een vectorruimte met $\dim V = n$. Laten $U_1, U_2, U_3 \subset V$ lineaire deelruimten zijn met $\dim U_1 = \dim U_2 = \dim U_3 = n - 1$.

(i) Laat zien dat $\dim(U_1 \cap U_2) = \begin{cases} n-2 & \text{als } U_1 \neq U_2, \\ n-1 & \text{als } U_1 = U_2. \end{cases}$

(ii) Bewijs dat $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \geq n - 3$.

(iii) Geef een voorbeeld van drie *verschillende* lineaire deelruimten $U_1, U_2, U_3 \subset \mathbb{R}^3$ met $\dim U_1 = \dim U_2 = \dim U_3 = 2$ en $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = 1$.

Oplossing:

(i) Als $U_1 = U_2$ is natuurlijk $U_1 \cap U_2 = U_1$ en dus $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 = n - 1$. Als $U_1 \neq U_2$ is $\dim(U_1 + U_2) > n - 1$, dus $U_1 + U_2 = V$. Dan is $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim V = n - 2$.

(ii) Dimensiestelling toegepast op $U_1 \cap U_2$ en U_3: $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim U_3 - \dim((U_1 \cap U_2) + U_3) \geq n - 2 + n - 1 - \dim((U_1 \cap U_2) + U_3) \geq 2n - 3 - n = n - 3$.

(iii) Zij $U_1 = L((1,0,0),(0,1,0))$, $U_2 = L((1,0,0),(0,0,1))$, $U_3 = L((1,0,0),(0,1,1))$, dan is duidelijk dat $\dim U_1 = \dim U_2 = \dim U_3 = 2$ en $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = L((1,0,0))$, dus $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = 1$.

Succes ermee!