Tentamen Lineaire Algebra 2 (kans B)

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan.

Opgave 1. (13 punten)
Zij $M_2(\mathbb{R})$ de vectorruimte der 2×2 matrices en zij

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + d = 0 \right\} \text{ en}$$
$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b + c = 0 \right\}.$$

(i) Laat zien dat U en W lineaire deelruimten van $M_2(\mathbb{R})$ zijn.

(ii) Bepaal $\dim U$ en $\dim W$ een geef een basis van U en een basis van W aan.

(iii) Bepaal de dimensie van $U \cap W$.

(iv) Laat zien dat voor $A \in W$ ook A^2 in W ligt.

Opgave 2. (12 punten)

(i) Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + z \\ -x + y - z \\ -y \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een basis van $\ker f$ en een basis van $\operatorname{Im} f$.

(b) Laat zien dat voor f uit deel (i) geldt dat $f(\operatorname{Im} f) \subseteq \operatorname{Im} f$.

(c) Wat is het beeld van de afbeelding $f \circ f$?

(ii) Van een lineaire afbeelding $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is bekend dat

$$g\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad g\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bepaal de matrices van g en van $g \circ g$ m.b.t. de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$.

Opgave 3. (13 punten)
Zij $V := \text{Pol}(2) = \{a+bx+cx^2 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ en zij $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\langle f, g\rangle := f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1).$$

Hierbij is met $f(a)$ de gewone evaluatie van het polynoom f in het punt $x = a$ bedoeld.

(i) Laat zien dat $\langle\ ,\ \rangle$ een inproduct op de vectorruimte V definieert.

(ii) Bepaal een orthogonale basis van V (m.b.t. het gegeven inproduct).

(iii) Zij $U := \{a + cx^2 \mid a, c \in \mathbb{R}\} \subset V$. Wat is de kleinste afstand die de vector $h := 1 + x \in V$ tot een vector in U heeft?

Opgave 4. (12 punten)
Bewijs of weerleg met een tegenvoorbeeld de volgende beweringen:

(i) Zij $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Dan is (v_1, v_2, v_3) een basis van $\mathbb{R}^3$ dan en slechts dan als $(v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3)$ een basis van $\mathbb{R}^3$ is.

(ii) Zij V een vectorruimte en X, Y lineaire deelruimten van V. Dan geldt $(X + Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$.

(iii) Zij V een vectorruimte en $f : V \to V$ een lineaire afbeelding zodanig dat $f \circ f = f$. Dan is f surjectief.

(iv) Zij A een $n \times n$ matrix met rang $A = n - 1$. Dan is rang $A^2 = n - 2$.

Succes ermee!