Hoofdstuk 1

Vectorruimten

1.1 Inleiding, definities en voorbeelden

Een van de meest fundamentele ontdekkingen in de wiskunde is ongetwijfeld de *coördinatisering* van het platte vlak, onafhankelijk gedaan door Pierre de Fermat (1601-1665) en René Descartes (1596-1650). D.w.z. je kiest een punt in het vlak, noemt dat de *oorsprong* en beschrijft dan van daaruit ieder punt van het vlak met twee coördinaten (a, b). M.a.w. ieder punt van het vlak kan door een element van $\mathbb{R}^2$ worden voorgesteld. Het paar $\binom{a}{b}$ wordt in de natuurkunde vaak door een "vector", d.w.z. een pijl van $\binom{0}{0}$ naar $\binom{a}{b}$, voorgesteld. De correspondentie tussen "vectoren" en paren punten $\binom{a}{b}$ uit $\mathbb{R}^2$ gaat zelfs nog verder: je kunt twee vectoren v_1 en v_2 volgens de bekende parallellogramwet optellen en krijgt dan een nieuwe vector. Als de vector v_1 begint in $\binom{0}{0}$ en eindigt in $\binom{a}{b}$ en de vector v_2 begint in $\binom{0}{0}$ en eindigt in $\binom{c}{d}$, dan kun je makkelijk narekenen dat de vector $v_1 + v_2$ begint in $\binom{0}{0}$ en eindigt in $\binom{a+c}{b+d}$ m.a.w. je vindt het eindpunt van de nieuwe vector $v_1 + v_2$ door de paren $\binom{a}{b}$ en $\binom{c}{d}$ *coördinaatsgewijs* op te tellen m.a.w.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Ook kun je een vector v met een getal $\lambda \in \mathbb{R}$ vermenigvuldigen. De resulterende vector λv heeft als eindpunt $\binom{\lambda a}{\lambda b}$, waarbij $\binom{a}{b}$ het eindpunt van v is. M.a.w. het eindpunt is verkregen door het paar $\binom{a}{b}$ coördinaatsgewijs met λ te vermenigvuldigen m.a.w.

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Samengevat: Het platte vlak met de bekende vector optelling en vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal (*scalair* genaamd) kunnen we vervangen door $\mathbb{R}^2$ met de coördinaatsgewijze optelling zoals in (1.1) en met de scalairvermenigvuldiging zoals in (1.2).

Ook voor de ons omringende drie dimensionale ruimte kunnen we eenzelfde verhaal houden: eenmaal een oorsprong gekozen hebbende correspondeert een vector uit de drie dimensionale ruimte met de optelling van de bijbehorende drietallen in $\mathbb{R}^3$ d.m.v.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}.$$

Net zo correspondeert het vermenigvuldigen van een vector uit de drie dimensionale ruimte met een getal $\lambda \in \mathbb{R}$ met het componentsgewijs vermenigvuldigen van een element van $\mathbb{R}^3$ m.a.w.

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}.$$

Samengevat: we kunnen de meetkunde in de twee resp. drie dimensionale ruimte vervangen door het algebraïsche object $\mathbb{R}^2$ resp. $\mathbb{R}^3$ met zijn optelling en scalairvermenigvuldiging zoals hierboven is gedefinieerd.

Het punt is nu dat onze meetkundige voorstelling ophoudt na de drie dimensionale ruimte d.w.z. we kunnen ons geen voorstelling maken van een 4, 5 of hoger dimensionale ruimte, echter ... de algebra gaat door!

Definitie 1.1.1 De verzameling $\mathbb{R}^n$ noemen we de *n-dimensionale ruimte* of liever *n-dimensionale vectorruimte*. De elementen uit $\mathbb{R}^n$ noemen we *vectoren*.

i) *Optelling* van de vectoren uit $\mathbb{R}^n$ definiëren we d.m.v.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

ii) *Scalairvermenigvuldiging* op de vectoren uit $\mathbb{R}^n$ definiëren we d.m.v.

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix} \quad \text{voor iedere } \lambda \in \mathbb{R}.$$

De verzameling $\mathbb{R}^n$ met deze optelling en scalairvermenigvuldiging heeft de volgende eigenschappen. Met $0 \in \mathbb{R}^n$ noteren we de vector waarvan alle componenten 0 zijn en voor $u \in \mathbb{R}^n$ zij $-u$ de vector $(-1)u$ waarvan iedere component het tegengestelde is van die van u.

Stelling 1.1.2 Voor alle $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ en alle $c, d \in \mathbb{R}$ geldt

1. $u + v = v + u$;
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$;
3. $u + 0 = 0 + u = u$;
4. $u + (-u) = 0 = -u + u$;
5. $c(du) = (cd)u$;
6. $1.u = u$.
7. $c(u + v) = cu + cv$;
8. $(c + d)u = cu + du$;

Opgave 1.1.3 Bewijs deze stelling.

Zoals hieronder duidelijk zal worden zijn er buiten $\mathbb{R}^n$ heel wat verschillende verzamelingen die ook aan de regels uit stelling 1.1.2 voldoen. Dit heeft er rond 1900 toe geleid een nieuw begrip in te voeren waarmee al deze verzamelingen beschreven konden worden; dit werd het begrip vectorruimte.

We geven nu eerst de formele definitie en daarna een groot aantal voorbeelden die dit begrip (hopelijk) zullen doen leven!

Definitie 1.1.4 Een *vectorruimte* is een verzameling V van objecten, *vectoren* genoemd, met daarop een optelling en een scalairvermenigvuldiging. D.w.z. bij ieder tweetal vectoren u en v in V bestaat er een vector, genoteerd $u+v$, in V en bij ieder tweetal $c \in \mathbb{R}$ en $u \in V$ bestaat er een vector, genoteerd cv, in V. Bovendien moeten deze optelling en scalairvermenigvuldiging aan de volgende 8 axioma's voldoen. Deze axioma's gelden voor alle vectoren u, v, w in V en alle scalairen c en d in $\mathbb{R}$.

Eigenschappen voor de optelling

1. $u + v = v + u$, commutatieve wet.
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$, associatieve wet.
3. Er bestaat een *nulvector* 0 in V zdd $u + 0 = u$.
4. Voor iedere u in V bestaat er een *tegengestelde vector* $-u$ in V zdd $u + (-u) = 0$.

Eigenschappen voor de scalairvermenigvuldiging

5. $c(du) = (cd)u$, associatieve wet.
6. $1.u = u$.

Gecombineerde eigenschappen voor optelling en scalairvermenigvuldiging

7. $c(u + v) = cu + cv$, distributieve wet.
8. $(c + d)u = cu + du$, distributieve wet.

Voorbeeld 1.1.5 $\mathbb{R}^n$ met de in definitie 1.1.1 gedefinieerde optelling en scalairvermenigvuldiging is een vectorruimte volgens stelling 1.1.2.

Voorbeeld 1.1.6 Zij S de verzameling van alle dubbel oneindige rijtjes getallen:

$$\{y_k\} = (\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots).$$

Als $\{z_k\}$ ook zo'n element van S is, dan definiëren we de som $\{y_k\} + \{z_k\}$ als de rij $\{y_k + z_k\}$ door plaatsgewijs de elementen van beide rijen op te tellen. De scalairvermenigvuldiging definiëren we d.m.v. $c\{y_k\} := \{cy_k\}$.

Ook S is een vectorruimte: het controleren van de axioma's gaat net als in 1.1.5. Bijvoorbeeld het rijtje dat uit allemaal nullen bestaat voldoet aan axioma 3 en als $u = \{y_k\}$ dan voldoet het rijtje $\{-y_k\}$ aan axioma 4.

De ruimte S heet de ruimte der (discrete tijd) *signalen*.

Voorbeeld 1.1.7 Voor $n \geq 0$ bestaat de verzameling $\mathrm{Pol}(n)$ der polynomen van graad ten hoogste n uit de polynomen van de vorm

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

waarbij de coëfficiënten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reële getallen zijn en t een variabele is. De graad van $p(t)$ is de hoogste macht die voorkomt. Het polynoom waarvan alle coëfficiënten nul zijn heeft per definitie graad $-\infty$ (min oneindig) en heet het *nulpolynoom*.

Als ook $q(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$ in $\mathrm{Pol}(n)$ is, dan definiëren we hun som $p(t) + q(t)$ d.m.v.

$$p(t) + q(t) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n.$$

Voor $c \in \mathbb{R}$ dan definiëren we

$$cp(t) := ca_0 + (ca_1)t + \cdots + (ca_n)t^n.$$

De lezer kan nu zelf nagaan dat $\mathrm{Pol}(n)$ een vectorruimte is: bijvoorbeeld het nulpolynoom speelt de rol van 0 uit axioma 3 en het polynoom $(-1)p(t)$ speelt de rol van $-u$ uit axioma 4.

Voorbeeld 1.1.8 De verzameling $M_{mn}(\mathbb{R})$ der $m \times n$ matrices met de in hoofdstuk 2 van LA1 gedefinieerde optelling en scalairvermenigvuldiging gedefinieerd door

$$c(a_{ij}) := (ca_{ij})$$

is een vectorruimte. Het axioma 3 is vervuld door de nulmatrix, bestaande uit allemaal nullen en als $u = (u_{ij})$ dan voldoet $(-u_{ij})$ aan axioma 4. De rest wordt aan de lezer overgelaten.

Voorbeeld 1.1.9 Een verzameling die geen vectorruimte is.
Zij $V := \mathbb{R}^2$ en neem op V de gewone optelling maar de volgende (ongewone) scalairvermenigvuldiging

$$c(u_1, u_2) := (cu_1, 0).$$

Dan is V geen vectorruimte, immers aan axioma 6 is niet voldaan, namelijk $1.(u_1, u_2) = (1.u_1, 0) = (u_1, 0) \neq (u_1, u_2) = u$ als $u_2 \neq 0$!

Voorbeeld 1.1.10 Zij V de verzameling van alle reëel-waardige functies op een gegeven verzameling D. Functies tellen we op de gebruikelijke manier (puntsgewijs) op: als $f : D \to \mathbb{R}$ en $g : D \to \mathbb{R}$ definiëren we $f + g$ d.m.v.

$$(f + g)(t) := f(t) + g(t) \text{ voor alle } t \in D.$$

Als $c \in \mathbb{R}$ en $f : D \to \mathbb{R}$ definiëren we een scalairvermenigvuldiging d.m.v.

$$(cf)(t) := cf(t) \text{ voor alle } t \in D.$$

Twee functies zijn gelijk als ze voor iedere $t \in D$ gelijke waarden hebben. De verzameling V met de zojuist gedefinieerde optelling en scalairvermenigvuldiging is een vectorruimte. De meeste axioma's volgen onmiddellijk uit die van de reële getallen. De nulfunctie 0 gedefinieerd door $0(t) = 0$ voor alle $t \in D$ voldoet aan axioma 3 en als $f : D \to \mathbb{R}$ dan voldoet de functie $(-1).f$ aan axioma 4.

Opmerking 1.1.11 De tot nog toe genoemde voorbeelden delen een eigenschap die het nagaan van de axioma's sterk vereenvoudigd: het rekenwerk is in ieder van de voorbeelden terug te brengen op berekeningen in de reële getallen omdat de bewerkingen (optelling, scalairvermenigvuldiging) d.m.v. componenten van de vectoren gedefinieerd zijn, die zelf reële getallen zijn. Maar de reële getallen hebben natuurlijk de in de axioma's vereiste eigenschappen.

De kracht van vectorruimte theorie is gelegen in het feit dat vectorruimten in *allerlei problemen verborgen zitten.* Het is dan ook vooral de kunst om vectorruimten te herkennen als je ze tegenkomt (immers dan kun je de hele theorie loslaten die we hieronder gaan ontwikkelen).

Hét gereedschap dat je helpt bij het herkennen van vectorruimten in het wild is de volgende eenvoudige maar zéér nuttige stelling. Eerst een definitie.

Definitie 1.1.12 Zij V een vectorruimte. Een deelverzameling W van V heet een *lineaire deelruimte* van V als geldt

1) $0 \in W$.

2) W is *gesloten onder de optelling* van V, d.w.z. als w_1 en w_2 in W, dan is ook $w_1 + w_2$ in W.
3) W is *gesloten onder de scalairvermenigvuldiging* op V, d.w.z. als w in W en c in $\mathbb{R}$, dan is ook cw in W.

Stelling 1.1.13 Zij V een vectorruimte en W een lineaire deelruimte van V. Dan is W een vectorruimte.

Voordat we deze stelling bewijzen, geven we eerst wat voorbeelden hoe hij in de praktijk wordt toegepast. Het grote voordeel is natuurlijk dat je i.p.v. 8 nog maar 3 axioma's hoeft na te gaan, waarvan er bovendien één is, het controleren of 0 in W zit. In feite kan 1) zelfs door de zwakkere eis worden vervangen dat W niet leeg is, want uit 3) volgt dan (m.b.v. lemma 1.1.17) dat $0.w = 0$ in W zit. M.a.w. het enigste wat je dan nog moet nagaan is of W gesloten is onder de optelling en scalairvermenigvuldiging.

Voorbeeld 1.1.14 Zij A een $m \times n$ matrix. Bekijk het stelsel $Ax = 0$ en definieer

$$\mathrm{Nul}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

Laat zien dat $\mathrm{Nul}(A)$ een vectorruimte is.

Oplossing. Volgens 1.1.13 is het voldoende te laten zien dat $\mathrm{Nul}(A)$ een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is. Duidelijk is dat $0 \in \mathrm{Nul}(A)$ omdat $A.0 = 0$. Stel nu dat x en y in $\mathrm{Nul}(A)$ m.a.w. $Ax = 0$ en $Ay = 0$. Dan $A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$. Dus $x + y \in \mathrm{Nul}(A)$. Tenslotte, als $x \in \mathrm{Nul}(A)$ en $c \in \mathbb{R}$, dan $A(cx) = cAx = c.0 = 0$ en dus $cx \in \mathrm{Nul}(A)$. M.a.w. $\mathrm{Nul}(A)$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$.

Voorbeeld 1.1.15 Bekijk de differentiaalvergelijking

$$y'' + 7y = 0. \tag{1.3}$$

Zij S gedefinieerd als de verzameling van alle functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ die aan (1.3) voldoen. Laat zien dat S een vectorruimte is.

Oplossing. Uit 1.1.10 (met $D = \mathbb{R}$) volgt dat de verzameling V bestaande uit alle functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ een vectorruimte is. We moeten dus volgens 1.1.13 laten zien dat S een lineaire deelruimte van V is. Duidelijk is dat de nulfunctie aan (1.3) voldoet, dus in S zit. Laat nu y_1 en y_2 in S m.a.w. $y_1'' + 7y_1 = 0$ en $y_2'' + 7y_2 = 0$. Dan $y_1'' + 7y_1 + y_2'' + 7y_2 = 0$ en dus $(y_1 + y_2)'' + 7(y_1 + y_2) = 0$ m.a.w. $y_1 + y_2 \in S$. Tenslotte, als $c \in \mathbb{R}$ en $y \in S$ dan $y'' + 7y = 0$ en dus $c(y'' + 7y) = 0$. Dus $(cy)'' + 7(cy) = 0$ m.a.w. $cy \in S$. Samengevat S is een lineaire deelruimte van V.

Laten we nu 1.1.13 bewijzen. Het bewijs maakt gebruik van de volgende twee lemma's. De bewijzen van deze lemma's leren ons ook hoe we met de abstracte axioma's 1 t/m 8 moeten omgaan.

Lemma 1.1.16 Zij V een vectorruimte. Dan geldt:
i) Het element 0 uit axioma 3 is uniek.
ii) Het element $-u$ uit axioma 4 is uniek.

Bewijs. i) Stel dat ook de vector $0'$ in V voldoet aan $u + 0' = u$ voor alle u in V. Dan i.h.b. door $u = 0$ te nemen vind je
(1) $0 + 0' = 0$.
Ook geldt volgens axioma 3 dat $u + 0 = u$ voor alle u in V en dus door i.h.b. voor $u = 0'$ te nemen vind je
(2) $0' + 0 = 0'$.
Omdat volgens axioma 1 geldt dat $0 + 0' = 0' + 0$ volgt dan uit (1) en (2) dat $0 = 0'$.
ii) Stel $u + a = 0$ en $u + b = 0$. Dan $b + (u + a) = (b + u) + a = (u + b) + a = 0 + a = a$. Anderzijds $b + (u + a) = b + 0 = b$. Dus $b = a$. □

Het element 0 uit V noemen we daarom *de nulvector* uit V en het unieke element $-u$ in V *de tegengestelde* van u.

Lemma 1.1.17 Zij V een vectorruimte en v in V. Dan geldt:
i) $0.v = 0$ (= de nulvector in V).
ii) $(-1)v = -v$ (= de tegengestelde van v in V).

Bewijs. i) $0.v + 0.v = (0 + 0).v = 0.v$. Tel aan beide kanten $-0.v$ op. Dit geeft $(0.v + 0.v) + -0.v = 0.v + -0.v = 0$. Links staat $0.v + (0.v + -0.v) = 0.v + 0 = 0.v$. Dus $0.v = 0$.
ii) $(-1)v + v = (-1)v + 1.v = ((-1) + 1)v = 0.v = 0$. Dus $(-1)v$ is de unieke tegengestelde van v m.a.w. $(-1)v = -v$. □

Bewijs van 1.1.13. De axioma's 1, 2 en 5 t/m 8 volgen uit die van V, axioma 3 volgt uit $0 \in W$ en tenslotte als $w \in W$, dan $(-1)w \in W$. Dan met 1.1.17 volgt $(-1)w + w = 0$, dus $(-1)w$ is een tegengestelde van w in W. □

Opgave 1.1.18 Zij V een vectorruimte en $v_1, \dots, v_n$ vectoren uit V. Een vector van de vorm $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$, waarbij $c_1, \dots, c_n$ reële getallen zijn, heet een *lineaire combinatie* van $v_1, \dots, v_n$. Zij $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ de verzameling van alle lineaire combinaties van $v_1, \dots, v_n$.

Bewijs dat $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ een lineaire deelruimte van V is (en dus een vectorruimte). Deze ruimte heet het *opspansel* van $v_1, \dots, v_n$.

Opgave 1.1.19 Zij F de verzameling van alle rijtjes $(a_1, a_2, \dots)$ van reële getallen met de eigenschap dat

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \text{ voor alle } n \geq 0.$$

Laat zien dat F met de plaatsgewijze optelling en scalairvermenigvuldiging een vectorruimte is. Dit is de ruimte der *Fibonacci-rijtjes*.

Opgave 1.1.20 Zij $n \geq 1$. Een matrix A uit $M_n(\mathbb{R})$ heet een *magisch vierkant* als de som van alle getallen in iedere rij, kolom en hoofddiagonaal gelijk is aan dezelfde constante. De verzameling van alle $n \times n$ magische vierkanten noemen we $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{R})$.

Bewijs dat $\mathrm{Mag}_n(\mathbb{R})$ een lineaire deelruimte van $M_n(\mathbb{R})$ is (en dus een vectorruimte).

Opgave 1.1.21 Zij V een vectorruimte, $u, v, w \in V$ en $a \in \mathbb{R}$. Bewijs:
1) $a.0 = 0$ (waarbij 0 = de nulvector in V).
2) als $u + v = u + w$, dan $v = w$.
3) $-(-v) = v$.
4) $-(av) = (-a)v = a(-v)$ en $(-a)(-v) = av$.
5) als $av = 0$, dan $a = 0$ of $v = 0$.
[Aanw.: bij 3) en 4) gebruik ii) van 1.1.17.]

1.2 De structuur van vectorruimten

Ieder molecuul is opgebouwd uit een (eindig) aantal atomen. Zo bestaat het watermolecuul H_2O uit 2 atomen waterstof (H) en 1 atoom zuurstof (O). We zouden dus ook kunnen schrijven $H_2O = 2.H + 1.O$. Net zo zouden we i.p.v. $CrMn_2O_8$ kunnen schrijven $1.Cr + 2.Mn + 8.O$.

We zullen hieronder zien dat we iedere vectorruimte ook m.b.v. zekere atomen kunnen opbouwen de we "basisvectoren" gaan noemen. We beginnen daarvoor eerst met een definitie (zie ook 1.1.18).

Definitie 1.2.1 Een vector v uit een vectorruimte V heet een *lineaire combinatie* van vectoren $v_1, \ldots, v_n$ uit V als v geschreven kan worden als

$$v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n, \text{ voor zekere } c_1, \ldots, c_n \text{ in } \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 1.2.2 Zij $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $v = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$.

Laat zien dat v een lineaire combinatie van v_1 en v_2 is.

Oplossing. Opdat v een lineaire combinatie van v_1 en v_2 is, moeten er c_1 en c_2 in $\mathbb{R}$ bestaan met $v = c_1v_1 + c_2v_2$ m.a.w.

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ofwel

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 6c_2 \\ 2c_1 + 4c_2 \\ -c_1 + 2c_2 \end{pmatrix}.$$

De verschillende componenten vergelijkend geeft

$$c_1 + 6c_2 = 9,\ 2c_1 + 4c_2 = 2 \text{ en } -c_1 + 2c_2 = 7.$$

Dit stelsel vergelijkingen oplossen geeft $c_1 = -3$ en $c_2 = 2$. Dus $v = -3v_1 + 2v_2$.

Opgave 1.2.3 Laat zien dat $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ *geen* lineaire combinatie van v_1 en v_2 (uit 1.2.2) is.

Voorbeeld 1.2.4 Zij $V = M_2(\mathbb{R})$. Zij $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Laat zien dat iedere v uit V een lineaire combinatie van v_1, v_2, v_3 en v_4 is.

Oplossing. Zij $v \in V$. Dan $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ voor zekere a, b, c, d in $\mathbb{R}$. "Scheiding der variabelen" geeft

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \\
&= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4.
\end{aligned}$$

In dit laatste voorbeeld is iedere vector uit V een lineaire combinatie van de vectoren v_1, v_2, v_3 en v_4. Deze situatie krijgt een speciale naam:

Definitie 1.2.5 Zij V een vectorruimte en $v_1, \ldots, v_n$ vectoren uit V. Als iedere vector uit V een lineaire combinatie van $v_1, \ldots, v_n$ is heet $(v_1, \ldots, v_n)$ een *volledig stelsel* voor V.

Voorbeeld 1.2.6 De vectoren $v_1, \ldots, v_4$ uit 1.2.4 vormen een volledig stelsel voor $M_2(\mathbb{R})$.

Voorbeeld 1.2.7 Laat zien dat de vectoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ geen volledig stelsel voor $\mathbb{R}^3$ vormen.

Oplossing. We moeten een vector in $\mathbb{R}^3$ zoeken die niet van de vorm $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ is. Daartoe bekijken we alle vectoren die wél van die vorm zijn, m.a.w. alle vectoren

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 2c_3 \\ c_1 + c_3 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 \end{pmatrix}$$

We zien dan dat voor ieder zo'n vector de laatste component de som van de eerste twee is. Omdat de vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ deze eigenschap niet heeft is hij dus niet te schrijven als $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$. M.a.w. (v_1, v_2, v_3) is niet een volledig stelsel voor $\mathbb{R}^3$.

In voorgaand voorbeeld is v_3 een lineaire combinatie van v_1 en v_2 namelijk $v_3 = v_1 + v_2$. We zeggen dat v_3 afhangt van v_1 en v_2. Meer algemeen definiëren we:

Definitie 1.2.8 Zij V een vectorruimte en $v_1, \ldots, v_n$ vectoren uit V. Dan heet $(v_1, \ldots, v_n)$ een *afhankelijk stelsel* als er een i is zodanig dat v_i een lineaire combinatie is van de overige v_j's m.a.w. als er bestaan $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n$ in $\mathbb{R}$ zdd

$$v_i = c_1v_1 + \cdots + c_{i-1}v_{i-1} + c_{i+1}v_{i+1} + \cdots + c_nv_n.$$

Een stelsel $(v_1, \ldots, v_n)$ heet *lineair onafhankelijk* als het geen afhankelijk stelsel is.

Voorbeeld 1.2.9 Het stelsel $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ is afhankelijk, immers $v_3 = v_1 + v_2$.

Om na te gaan of een stelsel onafhankelijk is, is het volgende lemma nuttig.

Lemma 1.2.10 Zij V een vectorruimte en $v_1, \ldots, v_n$ in V. Dan zijn gelijkwaardig:
i) $(v_1, \ldots, v_n)$ is een onafhankelijk stelsel.
ii) als $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$, dan $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Bewijs. i) $\Rightarrow$ ii) Laat $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$ en stel dat er een i bestaat met $c_i \neq 0$. Dan volgt door vermenigvuldigen met $\frac{1}{c_i}$ dat geldt

$$\frac{c_1}{c_i} v_1 + \cdots + \frac{c_{i-1}}{c_i} v_{i-1} + 1.v_i + \frac{c_{i+1}}{c_i} v_{i+1} + \cdots + \frac{c_n}{c_i} v_n = 0$$

en dus

$$v_i = \frac{-c_1}{c_i} v_1 + \cdots + \frac{-c_{i-1}}{c_i} v_{i-1} + \frac{-c_{i+1}}{c_i} v_{i+1} + \cdots + \frac{-c_n}{c_i} v_n.$$

Dus is v_i wél een lineaire combinatie van de overige v_j's, een tegenspraak. Er bestaat dus geen i met $c_i \neq 0$ m.a.w. $c_1 = \ldots = c_n = 0$.
ii) $\Rightarrow$ i) Stel $v_i = c_1v_1 + \cdots + c_{i-1}v_{i-1} + c_{i+1}v_{i+1} + \cdots + c_nv_n$ voor zekere $c_j \in \mathbb{R}$. Dan $c_1v_1 + \cdots + c_{i-1}v_{i-1} + (-1)v_i + c_{i+1}v_{i+1} + \cdots + c_nv_n = 0$ is een lineaire combinatie waarvan niet alle coëfficiënten nul zijn, een tegenspraak. Dus $(v_1, \ldots, v_n)$ is een onafhankelijk stelsel. $\square$

Voorbeeld 1.2.11 Laat zien dat $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ een onafhankelijk stelsel in $\mathbb{R}^3$ vormt.

Oplossing. Stel $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dan kunnen we dit m.b.v. de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ herschrijven als

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Men rekent eenvoudig na dat $\det A = 1 \neq 0$. Dus is A volgens stelling 3.2.9 LA1 inverteerbaar en dus volgt uit gevolg 2.4.5 LA1 dat $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Dus (v_1, v_2, v_3) is een onafhankelijk stelsel.

Opgave 1.2.12 Zij $(v_1, \ldots, v_n)$ een afhankelijk stelsel. Laat zien dat er een index i is zo dat v_i een lineaire combinatie van de voorafgaande vectoren is, d.w.z. zdd $v_i = c_1v_1 + \ldots + c_{i-1}v_{i-1}$ voor zekere $c_1, \ldots, c_{i-1}$ in $\mathbb{R}$.

Definitie 1.2.13 Zij V een vectorruimte. Een stelsel $(v_1, \ldots, v_n)$ heet een *basis* van V als $(v_1, \ldots, v_n)$ een onafhankelijk én volledig stelsel voor V is.

Voorbeeld 1.2.14 De vectoren v_1, v_2, v_3 en v_4 uit 1.2.4 vormen een basis voor $V = M_2(\mathbb{R})$.

Oplossing. Uit 1.2.4 volgt dat (v_1, v_2, v_3, v_4) een volledig stelsel vormt voor V. We moeten dus nog inzien dat het een onafhankelijk stelsel is. Stel daarom $c_1v_1 + \cdots + c_4v_4 = 0$. Dan

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dus $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Dus $(v_1, \ldots, v_4)$ is een onafhankelijk stelsel. □

Opgave 1.2.15 i) Bewijs dat $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ een basis is voor $\mathbb{R}^3$.

ii) Algemeen: zij $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^n$, d.w.z. e_i is de vector met 1 in de i-de component en 0 elders.

Bewijs dat $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ een basis vormt voor $\mathbb{R}^n$. Deze basis heet de *standaard basis* van $\mathbb{R}^n$.

Lemma 1.2.16 Zij $(v_1, \ldots, v_n)$ een basis van V. Dan kan iedere v uit V op precies één manier geschreven worden als $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ met $c_1, \ldots, c_n$ in $\mathbb{R}$.

Bewijs. Omdat $(v_1, \ldots, v_n)$ een volledig stelsel is, laat zich v als lineaire combinatie $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ schrijven. Stel nu dat ook $v = d_1v_1 + \cdots + d_nv_n$ geldt. Aftrekken van de tweede lineaire combinatie van de eerste geeft $0 = (c_1 - d_1)v_1 + \cdots + (c_n - d_n)v_n$ en omdat $(v_1, \ldots, v_n)$ een onafhankelijk stelsel is, volgt hieruit $c_i - d_i = 0$, dus $c_i = d_i$ voor $i = 1, \ldots, n$. □

Opgave 1.2.17 Zij V een vectorruimte en $v_1, \ldots, v_n$ vectoren in V. Bewijs dat de volgende uitspraken gelijkwaardig zijn:

i) $(v_1, \ldots, v_n)$ is een basis van V.

ii) $(v_1, \ldots, v_n)$ is een minimaal volledig stelsel, d.w.z. voor iedere index i is het stelsel $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ geen volledig stelsel meer.

iii) $(v_1, \ldots, v_n)$ is een maximaal onafhankelijk stelsel, d.w.z. voor iedere vector v_{n+1} is het stelsel $(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ een afhankelijk stelsel.

Een basis in een vectorruimte is zeker niet uniek: het is niet moeilijk in te zien dat bijvoorbeeld voor iedere $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ het stelsel $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}\right)$ een basis van $\mathbb{R}^2$ is. Echter één ding hebben al deze bases gemeen (blijkt): ze hebben hetzelfde aantal elementen. Dat dit altijd het geval is, is de uitspraak van de volgende centrale stelling.

Stelling 1.2.18 (Hoofdstelling van de Lineaire Algebra.)
Zij V een vectorruimte, $V \neq \{0\}$ en zij $(v_1, \ldots, v_n)$ een basis van V. Dan heeft iedere andere basis van V ook n elementen.

Voor het bewijs van deze stelling benodigen we de volgende twee lemma's.

Lemma 1.2.19 Zij $m > n$. Laat zien dat voor een $n \times m$ matrix A het stelsel lineaire vergelijkingen $Ac = 0$ met c in $\mathbb{R}^m$, d.w.z. het stelsel

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}c_1 & + & a_{12}c_2 & + \cdots + & a_{1m}c_m & = & 0 \\ a_{21}c_1 & + & a_{22}c_2 & + \cdots + & a_{2m}c_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1}c_1 & + & a_{n2}c_2 & + \cdots + & a_{nm}c_m & = & 0 \end{array}$$

een oplossing $c = (c_1 \; \ldots \; c_m)^t \neq 0$ heeft.

Bewijs. We noteren met A' de $n \times n$ matrix die de eerste n kolommen van A bevat. Als A' niet inverteerbaar is, is er volgens stelling 4.2.3 LA1 een vector $c' = (c_1 \; c_2 \; \ldots \; c_n)^t \neq 0$ met $A'c' = 0$. Door $c_{n+1} = \ldots = c_m = 0$ te kiezen, krijgen we een oplossing $c = (c_1 \; \ldots \; c_m)^t \neq 0$ met $Ac = 0$.

Als A' wel inverteerbaar is, laat zich A' d.m.v. elementaire rijoperaties op de eenheidsmatrix I_n transformeren, m.a.w. er is een inverteerbare matrix E zo dat $EA' = I_n$. Omdat elementaire rijoperaties de oplossingen van een stelsel lineaire vergelijkingen niet veranderen, heeft $EA\,c = 0$ dezelfde oplossingen als $Ac = 0$. De eerste n kolommen van EA zijn de kolommen van I_n. Zij nu $b = (b_1 \; \ldots \; b_n)^t$ de $(n+1)$ste kolom van EA, dan is b gelijk aan de lineaire combinatie $b_1e_1 + \ldots + b_ne_n$, waarbij e_i de i-de kolom van I_n is. Maar dan is $b_1e_1 + \ldots + b_ne_n - b = 0$ en dus is $c = (b_1, b_2, \ldots, b_n, -1, 0, \ldots, 0)^t$ een oplossing van $EA\,c = 0$ (en dus ook van $Ac = 0$) die niet nul is. $\square$

Lemma 1.2.20 Zij V een vectorruimte en $(v_1, \ldots, v_n)$ een volledig stelsel voor V. Dan is iedere verzameling van tenminste $n + 1$ vectoren in V afhankelijk.

Bewijs. Zij $\{s_1, \ldots, s_m\} \subset V$ met $m > n$ elementen. Omdat $(v_1, \ldots, v_n)$ een volledig stelsel voor V is, kun je iedere s_i schrijven als een lineaire combinatie van $v_1, \ldots, v_n$ m.a.w. er bestaan reële getallen a_{ij} zodanig dat

$$s_1 = a_{11}v_1 + \cdots + a_{n1}v_n, \quad s_2 = a_{12}v_1 + \cdots + a_{n2}v_n, \quad \ldots \quad s_m = a_{1m}v_1 + \cdots + a_{nm}v_n.$$

We moeten laten zien dat er constanten $c_1, \ldots, c_m$, niet allen nul, bestaan zdd

$$c_1s_1 + c_2s_2 + \cdots + c_ms_m = 0.$$

Met de hierbovenstaande formules voor $s_1, \ldots, s_m$ ingevuld, betekent dit dat we moeten bewijzen dat er $c_1, \ldots, c_m$ bestaan, niet allen nul, zodanig dat

$$(c_1a_{11} + \cdots + c_ma_{1m})v_1 + (c_1a_{21} + \cdots + c_ma_{2m})v_2 + \cdots + (c_1a_{n1} + \cdots + c_ma_{nm})v_n = 0.$$

We zijn dus klaar als we kunnen inzien dat het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}c_1 & + & a_{12}c_2 & + \cdots + & a_{1m}c_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1}c_1 & + & a_{n2}c_2 & + \cdots + & a_{nm}c_m & = & 0 \end{array}$$

een oplossing $c_1, \ldots, c_m$ heeft met niet alle $c_1, \ldots, c_m$ nul. Dit is echter juist de uitspraak van lemma 1.2.19. $\square$

Bewijs van de hoofdstelling
Zij naast de gegeven basis $(v_1, \ldots, v_n)$ ook $(u_1, \ldots, u_r)$ een basis van V. Omdat i.h.b. $(u_1, \ldots, u_r)$ een onafhankelijk stelsel is, volgt dat $r \leq n$; immers als $r \geq n+1$ dan is volgens 1.2.20 het stelsel $(u_1, \ldots, u_r)$ afhankelijk, een tegenspraak.

Net zo vinden we $n \leq r$, immers pas 1.2.20 toe met als basis $(u_1, \ldots, u_r)$ en gebruik dat i.h.b. $(v_1, \ldots, v_n)$ een onafhankelijk stelsel is. Uit $r \leq n$ en $n \leq r$ volgt dan $r = n$. $\square$

Het aantal vectoren in een basis van V hangt dus *niet* van de gekozen basis af. Dit aantal noemen we de *dimensie* van V. Precieser:

Definitie 1.2.21 Zij V een vectorruimte.

i) Als $V = \{0\}$ zeggen we dat V *nul dimensionaal* is: notatie $\dim V = 0$.
ii) Als $V \neq \{0\}$ is en V heeft een basis $(v_1, \ldots, v_n)$ zeggen we dat V *n-dimensionaal* is of ook dat V een vectorruimte van *dimensie* n is. Notatie $\dim V = n$.
iii) Als $V \neq \{0\}$ en V heeft geen eindige basis, dan zeggen we dat V *oneindig dimensionaal* is.

De voorgaande definitie veronderstelt stiekem dat iedere vectorruimte een basis *heeft*. Alhoewel deze uitspraak enigszins voor de hand liggend lijkt, is het bewijs voor het algemene geval te diepgaande om hier behandeld te worden.

Stelling 1.2.22 Iedere vectorruimte heeft een basis.

Voor vectorruimten die het opspansel van een eindig stelsel (en dus eindig dimensionaal) zijn, is het bewijs van deze stelling nog goed te doen. Maar voor vectorruimten met oneindige volledige stelsels wordt het *Lemma van Zorn* benodigd, een fundamenteel resultaat uit de verzamelingenleer dat gelijkwaardig is met het *keuzeaxioma*.

Voorbeeld 1.2.23 $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Oplossing. Volgens 1.2.15 ii) is $(e_1, \ldots, e_n)$ een basis van $\mathbb{R}^n$. $\square$.

Voorbeeld 1.2.24 Bepaal $\dim \mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$ (zie 1.1.20).

Oplossing. Volgens sectie 1.3 van LA1 zijn alle elementen uit $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$ van de vorm

$$M = \begin{pmatrix} a-c & a+b+c & a-b \\ a-b+c & a & a+b-c \\ a+b & a-b-c & a+c \end{pmatrix}.$$

Scheiden der variabelen geeft

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & c & 0 \\ c & 0 & -c \\ 0 & -c & c \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= av_1 + bv_2 + cv_3 \end{aligned}$$

waarbij $v_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

We zien dus dat iedere $v \in \mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$ te schrijven is als $av_1 + bv_2 + cv_3$. Dus is (v_1, v_2, v_3) een volledig stelsel voor $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$. Maar het is ook een onafhankelijk stelsel: immers stel dat $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. Bovenstaande berekening teruglezend geeft

$$\begin{pmatrix} a-c & a+b+c & a-b \\ a-b+c & a & a+b-c \\ a+b & a-b-c & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vergelijk van de matrix elementen op de plaatsen (2,2), (3,1), (1,1) geeft dan achtereenvolgens $a = 0$, $b = 0$ en $c = 0$. M.a.w. uit $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ volgt $a = b = c = 0$. Dus (v_1, v_2, v_3) is een onafhankelijke stelsel. Samengevat: (v_1, v_2, v_3) is een basis voor $\mathrm{Mag}_3(\mathbb{R})$. Dus $\dim \mathrm{Mag}_3(\mathbb{R}) = 3$.

Opgave 1.2.25 Zij F de ruimte der Fibonacci-rijtjes als in 1.1.19. Bewijs dat $\dim F = 2$.

Opgave 1.2.26 Bewijs dat $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$.

1.3 De dimensie van een vectorruimte

Het begrip "dimensie" bij een eindig dimensionale vectorruimte kunnen we vergelijken met het begrip "aantal" bij eindige verzamelingen. We bekijken nu welke bekende resultaten voor eindige verzamelingen doorgaan voor eindig dimensionale vectorruimten d.w.z. als we "aantal" door "dimensie" vervangen.

De volgende stelling is het analogon van de stelling dat een deelverzameling van een verzameling met n elementen ten hoogste n elementen heeft.

Stelling 1.3.1 Zij V een n-dimensionale vectorruimte en $U \subset V$ een lineaire deelruimte. Dan is U eindig dimensionaal en $\dim U \leq n$.

Het bewijs berust op het volgende lemma.

Lemma 1.3.2 Zij V een vectorruimte en $(u_1, \ldots, u_n)$ een onafhankelijk stelsel in V. Zij $v \in V \setminus \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$. Dan is $(u_1, \ldots, u_n, v)$ een onafhankelijk stelsel in V.

Bewijs. Stel dat $(u_1, \ldots, u_n, v)$ een afhankelijk stelsel is. Dan bestaan er $a_1, \ldots, a_n$, a in $\mathbb{R}$, niet allen nul met $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n + av = 0$. Als $a = 0$ dan volgt $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n = 0$ en dus vanwege de onafhankelijkheid van $(u_1, \ldots, u_n)$ volgt $a_1 = \ldots = a_n = 0$. Dit is in tegenspraak met het gegeven dat $a_1, \ldots, a_n, a$ niet allen nul zijn.

Blijkbaar is dus $a \neq 0$. Door dan de relatie $a_1u_1 + \cdots + a_nu_n + av = 0$ met $\frac{-1}{a}$ te vermenigvuldigen en vervolgens $-v$ naar de andere kant te brengen, vinden we dat $v = \frac{-a_1}{a} u_1 + \cdots + \frac{-a_n}{a} u_n \in \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, een tegenspraak. Blijkbaar is de veronderstelling dat $(u_1, \ldots, u_n, v)$ een afhankelijk stelsel is onjuist en dus is $(u_1, \ldots, u_n, v)$ een onafhankelijk stelsel. $\square$

Bewijs van stelling 1.3.1
Als $U = \{0\}$ dan $\dim U = 0 \leq n$. Neem dus aan $U \neq \{0\}$. Kies dan $u \in U$, $u \neq 0$. Vanwege

1.1.21 5) is (u) een onafhankelijk stelsel. Volgens 1.2.20 heeft ieder onafhankelijk stelsel in U $(\subset V)$ ten hoogste n elementen. Kies zo'n stelsel binnen U met het grootste aantal elementen, zeg $(u_1, \ldots, u_d)$. Dus $d \leq n$. Stel nu dat $\langle u_1, \ldots, u_d \rangle \subsetneqq U$. Kies dan $u_{d+1} \in U \setminus \langle u_1, \ldots, u_d \rangle$. Volgens 1.3.2 is dan $(u_1, \ldots, u_d, u_{d+1})$ een onafhankelijk stelsel met meer dan d elementen. Dit is in tegenspraak met de maximale keuze van d. Dus blijkbaar $\langle u_1, \ldots, u_d \rangle = U$. M.a.w. $(u_1, \ldots, u_d)$ is een volledig stelsel voor U en per definitie is het ook een onafhankelijk stelsel. Dus is het een basis van U en dus $\dim U = d \leq n$. $\square$

Voor eindige verzamelingen is de volgende uitspraak vanzelfsprekend: stel V heeft n elementen en $W \subset V$ heeft ook n elementen, dan is $V = W$. De navolgende stelling is het (niet-triviale) analogon van dit feit.

Stelling 1.3.3 Zij V een n-dimensionale vectorruimte en $W \subset V$ een lineaire deelruimte met $\dim W = n$. Dan is $W = V$.

Het bewijs van deze stelling is gebaseerd op:

Stelling 1.3.4 (Eerste basisstelling.) Zij V een n-dimensionale vectorruimte met $n \geq 1$. Dan is ieder onafhankelijk stelsel bestaande uit precies n vectoren een basis van V.

Bewijs. Zij $(v_1, \ldots, v_n)$ een onafhankelijk stelsel in V, We moeten nog inzien dat $(v_1, \ldots, v_n)$ volledig is m.a.w. dat $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = V$. Stel daarom dat $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subsetneqq V$. Dan bestaat $v \in V \setminus \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Volgens 1.3.2 is dan $(v_1, \ldots, v_n, v)$ een onafhankelijk stelsel van $n+1$ vectoren in V, een tegenspraak met 1.2.20. Dus blijkbaar geldt $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = V$. $\square$

Bewijs van stelling 1.3.3
Zij $(w_1, \ldots, w_n)$ een basis van $W \subset V$. Dan is i.h.b. $(w_1, \ldots, w_n)$ een onafhankelijk stelsel van n vectoren in V. Dus volgens 1.3.4 een basis van V. Dus $V = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle \subset W \subset V$. Dus $V = W$. $\square$

Stelling 1.3.5 (Tweede basisstelling.) Zij V een n-dimensionale vectorruimte met $n \geq 1$. Dan is ieder volledig stelsel van precies n vectoren in V een basis van V.

Het bewijs is gebaseerd op het volgende lemma.

Lemma 1.3.6 Zij $(v_1, \ldots, v_n)$ een volledig stelsel voor V. Als v_i afhangt van de overige v_j's dan is het stelsel $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ (d.w.z. v_i is weggelaten) ook volledig voor V.

Bewijs. We mogen aannemen dat $i = n$. Dan $v_n = a_1 v_1 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1}$ voor zekere a_j in $\mathbb{R}$. Zij $v \in V$. Omdat $(v_1, \ldots, v_n)$ volledig is, bestaan er λ_j in $\mathbb{R}$ met $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n$. De formule voor v_n invullend vinden we

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n (a_1 v_1 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1}) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_n a_1) v_1 + \cdots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n a_{n-1}) v_{n-1}. \end{aligned}$$

Dus $v \in \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$. Dit geldt voor iedere v in V, dus is $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ een volledig stelsel voor V. $\square$

Gevolg 1.3.7 Als $V \neq \{0\}$ een vectorruimte is en $(v_1, \ldots, v_n)$ een volledig stelsel van V, dan kun je uit dit stelsel een basis voor V maken door een eindig aantal (eventueel nul) er uit weg te laten.

Bewijs. Als $(v_1, \ldots, v_n)$ onafhankelijk is, is het een basis. Als $(v_1, \ldots, v_n)$ afhankelijk is, bestaat er een i zodanig dat v_i afhangt van de overige v_j's. Dus is volgens lemma 1.3.6 $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ een volledig stelsel voor V. Dan herhaal dit argument met dit nieuwe stelsel (inductie!). Het argument moet stoppen bij een onafhankelijk stelsel want als er maar een vector, zeg v, overblijft moet die $\neq 0$ zijn (want $V \neq \{0\}$) en volgens 1.1.21 5) is (v) onafhankelijk. $\square$

Bewijs van stelling 1.3.5
Zij $(v_1, \ldots, v_n)$ een volledig stelsel voor V. We moeten nog laten zien dat het onafhankelijk is. Stel dat het afhankelijk is, zeg v_i hangt van de overige v_j's af. Dan is volgens 1.3.6 $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ ook volledig voor V. Uit 1.3.7 zien we dan dat we hieruit een basis voor V kunnen maken door eventueel nog wat elementen weg te laten. Deze basis heeft dan ten hoogste $n-1$ elementen, een tegenspraak met de Hoofdstelling van de Lineaire Algebra omdat $\dim V = n$. $\square$

Voorbeeld 1.3.8 Zij $v_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$ en $v_3 := \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ en $U := \langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Bepaal een basis voor U en bereken $\dim U$.

Oplossing. Per definitie is (v_1, v_2, v_3) een volledig stelsel voor U. Om in te zien of en zo ja welke vector we uit (v_1, v_2, v_3) kunnen weglaten volgens 1.3.6, bepalen we een afhankelijkheidsrelatie d.w.z. stel $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$. Dan

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

m.a.w.

$$c_1 + 2c_2 = 0, \quad 3c_2 + c_3 = 0 \quad \text{en} \quad 2c_1 + 7c_2 + c_3 = 0.$$

M.b.v. Gauss-eliminatie vinden we dat $c_1 = -2$, $c_2 = 1$ en $c_3 = -3$ een oplossing is m.a.w. $-2v_1 + v_2 - 3v_3 = 0$, dus $v_2 = 2v_1 + 3v_3$. We kunnen dus v_2 weglaten en vinden dan dat (v_1, v_3) ook een volledig stelsel voor U is. Het is duidelijk dat dit stelsel onafhankelijk is, immers als

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \text{ dan } \begin{pmatrix}a\\b\\2a+b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

dus $a = b = 0$. Dus (v_1, v_3) is een basis voor U en $\dim U = 2$.

In gevolg 1.3.7 hebben we gezien dat we van een volledig stelsel naar een basis komen door geschikte elementen weg te laten. Andersom geldt ook dat we een onafhankelijk stelsel tot een basis kunnen aanvullen.

Lemma 1.3.9 Zij $\dim V = n$ en $U \subset V$ een lineaire deelruimte. Dan laat zich iedere basis van U uitbreiden (eventueel met nul vectoren) tot een basis van V.

Bewijs. Zij $(u_1, \ldots, u_m)$ een basis van U, dan is i.h.b. $(u_1, \ldots, u_m)$ een onafhankelijk stelsel. We gebruiken inductie over $\dim V - \dim U = n - m$. Voor $n - m = 0$ is $U = V$ en is $(u_1, \ldots, u_m)$ dus ook een basis van V.

Zij nu $n - m > 0$ en neem aan dat de bewering bewezen is voor U' met $\dim V - \dim U' < n - m$. Omdat $\dim U < \dim V$ is $U \subsetneq V$, en er bestaat $v_{m+1} \in V \setminus U$. Volgens lemma 1.3.2 is $(u_1, \ldots, u_m, v_{m+1})$ een onafhankelijk stelsel en dus een basis van het opspansel $U' = \langle u_1, \ldots, u_m, v_{m+1} \rangle$. Maar $\dim V - \dim U' = n - (m + 1) = n - m - 1$, dus laat zich $(u_1, \ldots, u_m, v_{m+1})$ volgens de inductieaanname tot een basis $(u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$ van V uitbreiden en dit is ook een uitbreiding van de basis $(u_1, \ldots, u_m)$ van U. $\square$

Als U en W deelverzamelingen van een eindige verzameling V zijn, dan is het aantal elementen in de vereniging $U \cup W$ gelijk aan de som der elementen in U en in W min het aantal in de doorsnede $U \cap W$. Een soortgelijke uitspraak geldt voor lineaire deelruimten, maar omdat de vereniging i.h.a. geen deelruimte is, moet deze vervangen worden door de som der deelruimten.

Definitie 1.3.10 Zij V een n-dimensionale vectorruimte en laten U en W lineaire deelruimten van V zijn. Dan is de *som* van U en W gedefinieerd door

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Opgave 1.3.11 Zij V een n-dimensionale vectorruimte en laten U en W lineaire deelruimten van V zijn.

i) Laat zien dat $U + W$ een lineaire deelruimte van V is (en dus een vectorruimte).
ii) Zij $(u_1, \ldots, u_m)$ een volledig stelsel voor U en $(w_1, \ldots, w_r)$ een volledig stelsel voor W. Laat zien dat $(u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_r)$ een volledig stelsel voor $U + W$ is, d.w.z. $U + W$ is het opspansel van de vereniging van volledige stelsels voor U en W.
iii) Laat zien dat $U + W$ de kleinste deelruimte van V is die $U \cup W$ bevat, d.w.z. voor iedere deelruimte V' van V die U en W bevat geldt $U + W \subseteq V'$.

Stelling 1.3.12 Zij V een n-dimensionale vectorruimte en laten U en W lineaire deelruimten van V zijn. Dan geldt

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Bewijs. Zij $(v_1, \ldots, v_s)$ een basis van $U \cap W$, dan is i.h.b. $\dim(U \cap W) = s$. Volgens lemma 1.3.9 kunnen we deze basis uitbreiden tot een basis $(v_1, \ldots, v_s, u_1, \ldots, u_m)$ van U, dan is $\dim U = s + m$. Net zo kunnen we de basis van $U \cap W$ uitbreiden tot een basis $(v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_r)$ van W, dan is $\dim W = s + r$.

Als we nu kunnen aantonen dat $B = (v_1, \ldots, v_s,\ u_1, \ldots, u_m,\ w_1, \ldots, w_r)$ een basis van $U + W$ is, is de bewering bewezen, want dan is

$$\dim(U + W) = s + m + r = (s + m) + (s + r) - s = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

We laten eerst zien dat B een volledig stelsel voor $U + W$ is. Zij $u + w \in U + W$. Omdat $(v_1, \ldots, v_s, u_1, \ldots, u_m)$ een basis van U is, zijn er a_i, b_i met $u = a_1 v_1 + \cdots + a_s v_s + b_1 u_1 + \cdots + b_m u_m$. Analoog zijn er c_i, d_i met $w = c_1 v_1 + \cdots + c_s v_s + d_1 w_1 + \cdots + d_r w_r$. Maar dan is $u + w = (a_1 + c_1) v_1 + \cdots + (a_s + c_s) v_s + b_1 u_1 + \cdots + b_m u_m + d_1 w_1 + \cdots + d_r w_r$, dus is $u + w$ inderdaad een lineaire combinatie van het stelsel B.

Nu nog de onafhankelijkheid van B. Zij

$$a_1 v_1 + \cdots + a_s v_s + b_1 u_1 + \cdots + b_m u_m + c_1 w_1 + \cdots + c_r w_r = 0$$

een lineaire combinatie die de nulvector geeft. Door de termen $c_i w_i$ naar de andere kant te brengen, krijgen we

$$w = -c_1 w_1 - \cdots - c_r w_r = a_1 v_1 + \cdots + a_s v_s + b_1 u_1 + \cdots + b_m u_m.$$

Volgens de linkerkant ligt w in W, volgens de rechterkant ook in U, dus is $w \in U \cap W$. Maar dan zijn er $d_i \in \mathbb{R}$ met $w = d_1 v_1 + \cdots + d_s v_s$ en door de eerste uitdrukking voor w hiervan af te trekken, vinden we

$$0 = d_1 v_1 + \cdots + d_s v_s + c_1 w_1 + \cdots + c_r w_r.$$

Maar $(v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_r)$ is een basis van W, dus is $d_1 = \cdots = d_s = 0$ en $c_1 = \cdots = c_r = 0$.

Dit brengt de oorspronkelijke lineaire combinatie terug naar

$$a_1 v_1 + \cdots + a_s v_s + b_1 u_1 + \cdots + b_m u_m = 0$$

en omdat $(v_1, \ldots, v_s, u_1, \ldots, u_m)$ een basis van U is, volgt hieruit dat $a_1 = \cdots = a_s = 0$ en $b_1 = \cdots = b_m = 0$. De coëfficiënten a_i, b_i en c_i moeten dus inderdaad allen nul zijn, dus is B een onafhankelijk stelsel. $\square$

Voorbeeld 1.3.13 Laten $U = \left\langle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ en $W = \left\langle w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ deelruimten van $\mathbb{R}^3$ zijn. Bepaal $\dim(U + W)$ en $\dim(U \cap W)$.

Oplossing. Men ziet rechtstreeks in dat $\dim U = 2$ en $\dim W = 2$. Omdat $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ is $\dim(U + W)$ of 2 of 3. Voor het eerste geval zou $U = W$ moeten zijn, maar $w_1 \notin U$, dus is $\dim(U + W) = 3$ en dus $U + W = \mathbb{R}^3$. Volgens stelling 1.3.12 is dan $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 2 - 3 = 1$. Er geldt $U \cap W = \langle w_2 \rangle$, want $w_2 = u_2 - u_1$.

Historische opmerkingen

De eerste wiskundige die een abstracte definitie gaf van een vectorruimte was Guiseppe Peano (1858-1932) in zijn Calculo Geometrio in 1888. Veel van de berekeningen in zijn boek bestaan uit berekeningen met punten, lijnen, vlakken en volumes. Maar in het negende hoofdstuk definieert Peano wat hij noemt een lineair systeem. Dit is wat in onze definitie 1.1.4 een vectorruimte heet. Ook definieert Peano de dimensie van een vectorruimte. Peano's werk had geen onmiddellijk effect; de definitie werd zelfs vergeten. Het kwam pas onder de aandacht van de wiskundige wereld door het boek 'Raum-Zeit-Materie' (1918) van Hermann Weyl (1885-1955). Weyl schrijft dit boek als een inleiding op Einstein's algemene relativiteitstheorie. In hoofdstuk 1 formuleert hij de axioma's zoals Peano dat eerder deed. Hij schrijft "Niet alleen in de meetkunde, maar tot op steeds verbazingwekkender hoogte in de natuurkunde, is het meer en meer duidelijk geworden dat zodra we erin geslaagd zijn de natuurkundige wetten te ontrafelen die de werkelijkheid regeren, vinden we dat ze door wiskundige relaties beschreven kunnen worden van een verbluffende eenvoud en architectonische perfectie! . . . Vectorruimtetheorie . . . levert een idee, zelfs als is het onvoldoende, van deze perfectie van vorm."